- جامعـــــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الأولى

مقدمة عامة: (تصلح لميكانيك السوائل وعلم المرونة).

تعاريف أساسية:

- **النقطة المادية:** هي نقطة هندسية M مزودة بكتلة m. ونرمز عادة للنقطة المادية بالرمز (M, m).
- **كتلة النقطة المادية:** هي مقدار موجب يدل على ممانعة النقطة المادية عن الحركة.
- **المجموعة المادية:** إذا كانت $(M_1,m_1), (M_2,m_2), \dots, (M_n,m_n)$ نقاط مادية فإننا ندعوا المجموعة $S := \{(M_1,m_1), (M_2,m_2), \dots, (M_n,m_n)\}$ بالمجموعة المادية.
- **الميكانيك:** هو العلم الذي يدرس الحركة والتحريك والتوازن.
- **العِلْم:** كل دراسة، نتائجها لا تتعلق لا بزمان ولا بمكان، وإنما محكومة بقوانين وعلاقات.
- **علم الحركة:** هو العلم الذي يدرس الحركة بإهمال المسببات التي أدت إلى هذه الحركة (يهتم بدراسة متجه الموضع والسرع والتسارعات والطاقات الحركية وعزوم الحركة و ...، ويهمل دراسة القوى وأعمالها وعزوم هذه القوى ...).
- **علم التحريك:** هو العلم الذي يدرس الحركة مع الأسباب التي أدت إلى هذه الحركة.
- **علم التوازن:** هو العلم الذي يدرس مواضع التوازن.
- **الوسط المادي المستمر:** هو مجموعة مادية، كل نقطة من نقاطها تكون ملتصقة بنقطة أخرى (كالأجسام الصلبة، والسوائل الموجودة في وعاء واحد، والغازات الموجودة في حيّز واحد).

نتيجة:

الوسط المادي المستمر هو جزء من الفراغ مملوء بالمادة، وكل نقطة مادية منه تكون ملتصقة بالأخرى.

- **الجسم القاسي:** هو وسط مادي مستمر، يبقى البعد بين أي نقطتين من نقاطه ثابتاً بتغير الزمن.

- **التشوه (تشوه وسط مادي مستمر):** ليكن لدينا وسطاً مادياً مستمراً S (ليس بالضرورة جسماً قاسياً).عندئذٍ بنتيجة تطبيق قوى خارجية على هذا الوسط في اللحظة $t>0$ فإن نقاط هذا الوسط سيعاد توزيعها من جديد في اللحظة $t>0$ (كأن يصبح تغير بالأبعاد أو الزوايا أو كليهما ...)، ويدعى هذا الوضع الجديد، بتشوه الوسط المادي المستمر S في اللحظة $t>0$.

وبلغة الفيزياء فإن التشوه يعني تغيراً بالحجم و الشكل.

نتيجة:

تشوه الوسط المادي المستمر من وجهة النظر الفيزيائية هو تغير في الشكل والحجم للوسط المادي المستمر عن الحالة الطبيعية.

- ندعوا الحالة التي يكون فيها الوسط المادي المستمر غير مشوه بالحالة الطبيعية للوسط المادي المستمر، وهي الحالة التي يوجد فيها هذا الوسط كما أوجدته الطبيعة.
- **الجسم المرن:** هو وسط مادي مستمر توجد قوى خارجية عند تطبيقها عليه في اللحظة $t>0$ فإنه يتشوه، وبإزالة هذه القوى المؤثرة يعود هذا الوسط إلى وضعه الأسبق قبل تطبيق القوى الخارجية عليه.
- **الجسم اللدن (البلاستيك):** هو وسط مادي مستمر توجد قوى خارجية إذا طبقناها عليه في اللحظة $t>0$ فإنه يتشوه، وبإزالة هذه القوى فإنه لا يعود إلى الوضع السابق بشكل كامل.
- **المائع (لا نقول الجسم المائع وإنما المائع):** هو وسط مادي مستمر إذا طبقنا عليه أي قوى خارجية في اللحظة $t>0$ فإنه يتشوه تشوهاً كاملاً وبإزالة هذه القوى عنه لا يعود إلى وضعه الأسبق حتى ولو بجزء بسيط.

المائع الضغوط والمائع غير الضغوط:

أ) المائع غير الضغوط (الغير قابل للضغط):

هو مائع لا يتغير حجمه بتغير ضغطه.

ب) المائع الضغوط (القابل للضغط):

هو مائع يتغير حجمه بتغير ضغطه.

تنقسم الموائع إلى قسمين:

1) النوع الأول: وهي السوائل: وهي موائع غير ضغوطة، تأخذ شكل الجزء السفلي (أي الجزء المملوء) من الإناء الذي توضع فيه، ويكون سطحها في الحالة العامـــة مـــستوٍ أفقي.

2) النوع الثاني: وهي الغازات: وهي موائع ضغوطة تملأ أي مكان مغلق توضع فيه.

ملاحظة: الهيدروليك: هو ميكانيك السوائل. أما مقاومة المواد فهي العلم الذي يدرس توازن الأجسام الصلبة.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 3 10 2010 .

- جامعـــة البعـــــــث .
- كليـــة العلـــــــوم .
- قســـم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

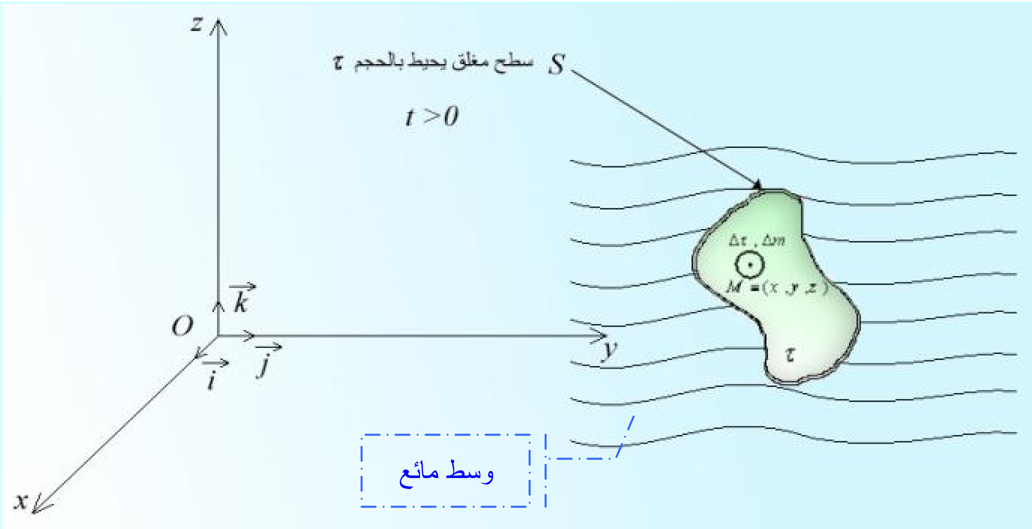
ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثانية

القوى المؤثرة على جزء من مائع:

لتكن $Oxyz$ جملة ديكارتية قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $(\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ وعطالية (يتحقق فيها قانون نيوتن الثاني). وليكن لدينا مائعاً ما جارٍ أو ساكن. في اللحظة $t>0$ (لحظة الجريان) نأخذ من هذا المائع حجماً τ، ولنفرض أن هذا الحجم τ محاط بالسطح S المغلق.



عندئذٍ يؤثر في τ نوعين من القوى:

1) قوى التأثير المتبادل بين نقاط τ المادية، محصلتها معدومة. (لا تهمنا دراستها).

2) قوى خارجية تصنف إلى نوعين:

أ) قوى خارجية مصدرها من خارج المائع الكلي، وتدعى في ميكانيك الموائع اختصاراً بالقوى الخارجية المؤثرة في τ.

ب) قوى خارجية مصدرها الجزء المتبقي من المائع الكلي، وتدعى في ميكانيك الموائع اختصاراً بالقوى الداخلية المؤثرة في τ.

وسندرس الآن القوى الخارجية والداخلية التي تؤثر في τ بالتفصيل:

القوى الخارجية المؤثرة في τ:

من أجل دراسة هذه القوى تلزمنا بعض المفاهيم الميكانيكية، وفيما يلي سنعرض هذه المفاهيم.

أولاً: الكثافة الحجمية الوسطى والكثافة الحجمية للمائع في نقطة منه:

ليكن $\Delta\tau$ حجماً عنصرياً من τ ولنفرض أن كتلة $\Delta\tau$ هي Δm، ولتكن $M \equiv (x , y , z)$ نقطة مادية من $\Delta\tau$، عندئذٍ نسمي:

$$\rho_m := \frac{\Delta m}{\Delta\tau} \quad .... \ (1)$$

بالكثافة الحجمية الوسطى لعنصر الحجم $\Delta\tau$ من هذا المائع.

ملاحظة:

الرمز $\Delta\tau \to M$ يعني أن الحجم العنصري $\Delta\tau$ ينكمش إلى النقطة المادية M. وعندئـذٍ سيسعى حجم العنصر الحجمي $\Delta\tau$ والذي سنرمز له أيضاً بـ $\Delta\tau$ إلى الصفر، أي أن: $\Delta\tau \to 0$. والعكس صحيح.

لنجعل الآن $\Delta\tau \to M$ في العلاقة (1) السابقة، فإذا فرضنا أن النهاية $\lim\limits_{\Delta\tau \to M} \frac{\Delta m}{\Delta\tau}$ موجودة ومحدودة؛ فإننا نسمي هذه النهاية بالكثافة الحجمية للمائع في النقطة المادية M منه. ونرمز لهذه الكثافة الحجمية للمائع في النقطة M بالرمز $\rho(M)$، بمعنى أنه:

$$\rho(M) = \lim_{\Delta\tau \to M} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau \to 0} \frac{\Delta m}{\Delta\tau} = \frac{dm}{d\tau}(M)$$

بلغة التحليل الرياضي هذه النهاية تعني المشتق

وبالتالي:

$$\rho(M) = \frac{dm}{d\tau}(M) \quad .... \ (2)$$

ومنذ قليل، وجدنا العلاقة (1)، التي تعطينا الكثافة الحجمية الوسطى لعنصر الحجم $\Delta\tau$، ومن هذه العلاقة نجد: $\Delta m = \rho_m . \Delta\tau$. فإذا فرضنا الآن أن dm هي كتلة عنصر الحجم التفاضلي $d\tau$، فعندئذٍ ينتج لدينا من العلاقة (2) ما يلي:

$$dm = \rho(M) . d\tau$$

وبالتالي تكون كتلة كامل الحجم τ هي:

$$m = \int_{\tau} \rho(M)\, d\tau$$

ثانياً: القوة الحجمية الوسطى للمائع، والقوة الحجمية للمائع في نقطة منه:

لنرمز بـــ $\overrightarrow{\Delta F_e}$ لحاصلة القوى الخارجية (من خارج المائع الكلي) المؤثرة في $\Delta\tau$. عندئـذٍ نسمي: $\overrightarrow{F_m} := \dfrac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta\tau}$ بالقوة الحجمية الوسطى للمائع والمؤثرة بعنصر الحجم $\Delta\tau$.

لنجعل الآن $\Delta\tau \to M$ في العلاقة السابقة، فإذا كانـت النهايـة $\lim\limits_{\Delta\tau\to M} \dfrac{\Delta m}{\Delta\tau}$ موجـودة ومحدودة، فإننا نسمي هذه النهاية بالقوة الحجمية للمائع في النقطة المادية M منه، ونرمـز لهذه القوة الحجمية بالرمز $\vec{F}(M)$؛ بمعنى أنه:

$$\vec{F}(M) = \lim_{\Delta\tau\to M} \frac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta\tau} = \lim_{\Delta\tau\to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta\tau} = \frac{d\overrightarrow{F_e}}{d\tau}(M)$$

بلغة التحليل الرياضي هذه النهاية تعني المشتق

وبالتالي:

$$\vec{F}(M) = \frac{d\overrightarrow{F_e}}{d\tau}(M) \quad .... \ (3)$$

وجدنا منذ قليل أن: $\overrightarrow{F_m} := \dfrac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta\tau}$ وبالتالي يكون: $\overrightarrow{\Delta F_e} = \overrightarrow{F_m}.\Delta\tau$، فإذا فرضنا في العلاقة (3) أن $d\overrightarrow{F_e}$ القوى الخارجية المؤثرة في $d\tau$، فمن العلاقة (3) نجد:

$$d\overrightarrow{F_e} = \vec{F}(M).d\tau$$

وبما أن $d\tau$ صغير جداً، فيمكن اعتبار أن $d\overrightarrow{F_e}$ هي وفقط هي حاصلة القوى المؤثرة فـي النقطة المادية M، وبالتالي يكون عزمها بالنسبة لــ O هو:

$$d\overrightarrow{\mathrm{M}_o} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F_e}$$

وبالتالي حاصلة القوى الخارجية المؤثرة في τ هي:

$$\overrightarrow{F_e} = \int_{\tau} \vec{F}(M).d\tau$$

والعزم الحاصل لها بالنسبة للنقطة O هو:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_o} = \int_{\tau} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M)\ d\tau$$

تعريف:

ندعوا الثنائية $\left(\overrightarrow{F_e}\ ,\overrightarrow{\mathrm{M}_o}\right)$ حيث $\overrightarrow{F_e} = \int_{\tau} \vec{F}(M).d\tau$ و $\overrightarrow{\mathrm{M}_o} = \int_{\tau} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M)\ d\tau$ بـ
تورسور القوى الخارجية المؤثرة في τ بلغة القوة الحجمية $\vec{F}(M)$.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 5 10 2010 .

- جامعـــة البعـــــــث.
- كليـــة العلـــــــوم.
- قســــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثالثة

مفهوم قوة الكتلة الوسطى، وقوة الكتلة للمائع في نقطة مادية منه:

وجدنا في المحاضرة السابقة أن: $dm = \rho(M).d\tau \;,\; \Delta m = \rho_m.\Delta\tau$.

فإذا فرضنا أن $\overrightarrow{\Delta F_e}$ هي حاصلة القوى الخارجية (من خارج المائع الكلي) المؤثرة في $\Delta\tau$، فإننا نسمي:

$$\overrightarrow{F_m} := \frac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta m} \quad \ldots\ldots\ldots \;(1)$$

بقوة الكتلة الوسطى للحجم $\Delta\tau$.

لنلاحظ الآن أنه لو انكمشت $\Delta\tau$ إلى M، بمعنى $\Delta\tau \to M$،عندئذٍ سيتحقق:

$$\Delta\tau \to M \Leftrightarrow \Delta\tau \to 0 \Leftrightarrow \Delta m \to 0$$

لنجعل جعلنا الآن $\Delta\tau \to M$ في العلاقة (1)، فإذا فرضنا أن النهاية: $\lim\limits_{\Delta\tau\to M} \dfrac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta m}$ موجودة ومحدودة، فإننا نسمي هذه النهاية بقوة الكتلة للمائع في النقطة المادية M منه، ونرمز لهذه القوة بالرمز $\vec{F}(M)$ ؛ بمعنى أنه:

$$\vec{F}(M) = \lim_{\Delta\tau\to M} \frac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta m} = \lim_{\Delta m\to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_e}}{\Delta m} = \frac{d\overrightarrow{F_e}}{dm}(M) \quad \ldots\ldots\ldots \;(2)$$

من العلاقة (1) وجدنا أنه:

$$\overrightarrow{\Delta F_e} = \overrightarrow{F_m}.\Delta m = \overrightarrow{F_m}.\rho_m.\Delta\tau$$

فإذا فرضنا في (2) أن $d\overrightarrow{F_e}$ هي حاصلة القوى الخارجية المؤثرة في عنصر الحجم التفاضلي $d\tau$ ذي الكتلة dm، فينتج من (2) أن:

$$d\overrightarrow{F_e} = \vec{F}(M).dm = \vec{F}(M).\rho(M).d\tau$$

وبالتالي يكون عزمها بالنسبة لـ O هو:

$$d\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F_e} = \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{F}(M).\rho(M).d\tau\right]$$
$$= \rho(M)\left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M)\right]d\tau$$

وبالتالي حاصلة القوى الخارجية المؤثرة في τ هي:

$$\overrightarrow{F_e} = \int_\tau \vec{F}(M).dm = \int_\tau \rho(M)\vec{F}(M)\,d\tau$$

والعزم الحاصل لهذه القوى بالنسبة لـــ O هو:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F_e} = \int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{F}(M).\rho(M).d\tau \right]$$

$$= \int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) \right] d\tau$$

تعريف:

نسمي الثنائية $\left(\overrightarrow{F_e} , \overrightarrow{\mathrm{M}_O} \right)$ حيث:

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_O} = \int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M) \right] d\tau \quad \text{و} \quad \overrightarrow{F_e} = \int_\tau \rho(M)\vec{F}(M)\, d\tau$$

بـــ تورسور القوى الخارجية المؤثرة في τ بلغة الكثافة الحجمية $\rho(M)$ وقوة الكتلة للمائع $\overrightarrow{F}(M)$ في النقطة المادية M منه.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 7 10 2010 .

- جامعة البعث .
- كلية العلوم .
- قسم الرياضيات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الرابعة

العلاقة بين القوة الحجمية وقوة الكتلة والكثافة الحجمية:

لنرمز بـ $\vec{F}_{valum}(M)$ للقوة الحجمية للمائع في النقطة المادية $M \in \tau$، ولنرمز بـ $\vec{F}_{mass}(M)$ لقوة الكتلة للمائع في النقطة المادية $M \in \tau$.

وجدنا سابقاً أن: $dm = \rho(M).d\tau$. ولدينا: $\vec{F}_{mass}(M) = \dfrac{d\vec{F}_e}{dm}$، وبالتالي يكون:

$$\vec{F}_{mass}(M) = \frac{d\vec{F}_e}{dm} = \frac{d\vec{F}_e}{\rho(M).d\tau}(M) = \frac{1}{\rho(M)}\frac{d\vec{F}_e}{d\tau}(M)$$
$$= \frac{1}{\rho(M)}\vec{F}_{valum}(M)$$

بالتالي:

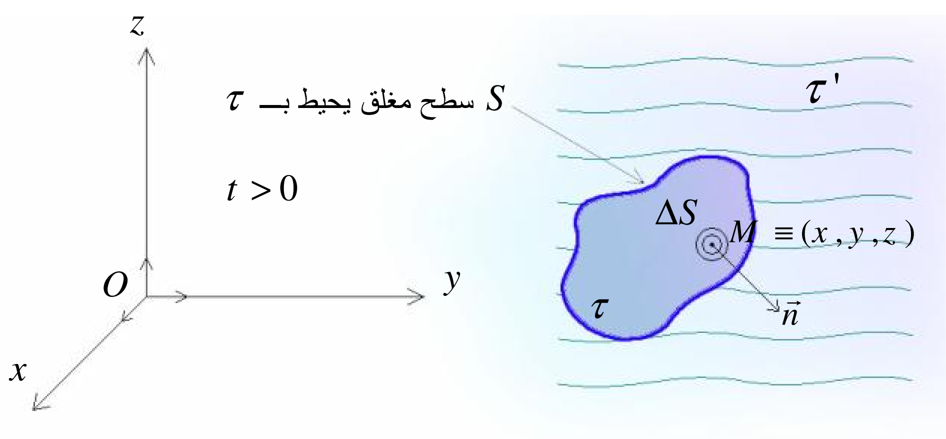
$$\vec{F}_{mass}(M) = \frac{1}{\rho(M)}\vec{F}_{valum}(M) \Leftrightarrow \vec{F}_{valum}(M) = \rho(M).\vec{F}_{mass}(M)$$

القوى الداخلية المؤثرة بحجم τ، مأخوذ في اللحظة $t > 0$ من مائع جارٍ أو ساكن:

وجدنا في المحاضرتين السابقتين أن القوى الداخلية التي يخضع لها الحجم τ هي القوى التي يؤثر بها $\tau' \cup S$ على τ (حيث S هو السطح المغلق الذي يحيط بالحجم τ، و τ' هو الحجم المتبقي من المائع الكلي والموجود خارج السطح المغلق S).

وتدل التجربة على أن هذه القوى الداخلية التي يؤثر بها $\tau' \cup S$ على τ هي وفقط هي القوى التي يؤثر بها τ' على S.

ولندرس الآن هذه القوى التي يؤثر بها τ' على S. ولدراسة ذلك سنأخذ مفهوم القوة السطحية الوسطى (قوة الضغط الوسطى)، والقوة السطحية (قوة الضغط).



قوة الضغط الوسطى، وقوة الضغط:

لتكن $M \equiv (x, y, z)$ نقطة ما مادية من السطح S، ولنرمز بـ $\vec{n}$ لمتجه واحدة ناظم السطح S في النقطة المادية M، والموجه نحو خارج τ، وليكن ΔS عنصر سطح جزئي من S، يحوي النقطة المادية M.

ولنرمز الآن بـ $\overrightarrow{\Delta F_i}$ لحاصلة القوى الداخلية ،التي مصدرها τ'، والمؤثرة بـ ΔS. عندئذٍ نسمي:

$$\overrightarrow{P_m} := \frac{\overrightarrow{\Delta F_i}}{\Delta S} \quad \text{........} \quad (1)$$

بقوة الضغط الوسطى التي يؤثر بها τ' (أو المائع خارج S) على ΔS.

ملاحظة:

الرمز $\Delta S \to M$ يعني أن عنصر السطح ΔS ينكمش إلى النقطة المادية M منه، وعندئذٍ سيتحقق:

$$\Delta S \to M \Leftrightarrow \Delta S \to 0$$

أي أنه إذا انكمش عنصر السطح ΔS إلى النقطة المادية M منه، فإن مساحة عنصر السطح هذا والتي سنرمز لها أيضاً بـ ΔS ، ستسعى حينها نحو الصفر.

ولنجعل الآن $\Delta S \to M$ في العلاقة (1) السابقة، فإذا كانت عندئذٍ النهاية $\lim\limits_{\Delta S \to M} \frac{\overrightarrow{\Delta F_i}}{\Delta S}$ موجودة ومحدودة، فإننا ندعوا هذه النهاية بقوة ضغط المائع τ' المطبقة على S في النقطة المادية M منه، حيث أن الناظم الخارجي هو $\vec{n}$، ونرمز لهذه القوة بالرمز $\overrightarrow{P_n}(M)$؛ بمعنى أنه:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = \lim_{\Delta S \to M} \frac{\overrightarrow{\Delta F_i}}{\Delta S} = \lim_{\Delta S \to 0} \frac{\overrightarrow{\Delta F_i}}{\Delta S} = \frac{d\overrightarrow{F_i}}{dS}(M) \quad \text{........} \quad (2)$$

إن فرضنا في (1) بأن $\overrightarrow{\Delta F_i}$ هي حاصلة القوى الداخلية التي يؤثر بها τ' على ΔS، ينتج عنه أن:

$$\overrightarrow{\Delta F_i} = \overrightarrow{P_m} . \Delta S$$

وبنفس الشكل في العلاقة (2) إذا فرضنا أن $d\overrightarrow{F_i}$ هي حاصلة القوى الداخلية التي يؤثر بها τ' على dS فينتج عن ذلك أن:

$$d\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{P_n}(M).dS$$

وبما أن dS صغيرة جداً فإن حاصلة القوى التي يؤثر بها τ' على dS هي وفقط هي حاصلة القوى التي يؤثر بها τ' على النقطة المادية M من dS المحتوى في ΔS والمحتوى بدوره في S. وبالتالي يكون عزم هذه القوى بالنسبة للنقطة O هو:

$$d\overrightarrow{\mathrm{L}_o} = \overrightarrow{OM} \wedge d\overrightarrow{F_i} = \overrightarrow{OM} \wedge \left[\overrightarrow{P_n}(M).dS\right] = \left[\overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P_n}(M)\right].dS$$

وبالتالي تكون حاصلة القوى الداخلية التي يؤثر بها τ' على S هي:

$$\overrightarrow{F_i} = \int_S \overrightarrow{P_n}(M)\, dS$$

وعزمها الحاصل بالنسبة لـ O هو:

$$\overrightarrow{\mathrm{L}_o} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P_n}(M)\; dS$$

تعريف:

ندعوا الثنائية $\left(\overrightarrow{F_i}\ ,\overrightarrow{\mathrm{L}_o}\right)$، حيث:

$$\overrightarrow{\mathrm{L}_o} = \int_S \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P_n}(M)\; dS \quad \text{و} \quad \overrightarrow{F_i} = \int_S \overrightarrow{P_n}(M)\, dS$$

بـ تورسور القوى الداخلية المؤثرة بالحجم τ من المائع.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 10 10 2010 .

- جامعة البعث .
- كلية العلوم .
- قسم الرياضيات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الخامسة

تورسور القوى الكلية المؤثرة بالحجم τ من مائع جار (أو ساكن)، في اللحظة $t>0$:

آ) بلغة القوة الحجمية:

وجدنا في محاضرة سابقة أن تورسور القوى الخارجية المؤثرة في الحجم τ من مائع جار (أو ساكن)، في اللحظة $t>0$ ، بلغة القوة الحجمية هو $\left(\overrightarrow{F_e}\,,\overrightarrow{\mathrm{M}_o}\right)$، حيث:

$$\overrightarrow{F_e}=\int_{\tau}\vec{F}(M).d\tau$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_o}=\int_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\,d\tau$$

ولنفرض الآن أن:

$$\vec{F}=\vec{F_e}+\vec{F_i}=\int_{\tau}\overrightarrow{F}(M)d\tau+\int_{S}\overrightarrow{P_n}(M)dS$$

$$\vec{\eta}_o=\overrightarrow{\mathrm{M}_o}+\overrightarrow{\mathrm{L}_o}=\int_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{F}(M)\,d\tau+\int_{S}\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{P_n}(M)\,dS$$

عندئذٍ نسمي التورسور $\left(\overrightarrow{F}\,,\overrightarrow{\eta_0}\right)$ بـــ تورسور القوى الكلية المؤثرة في الحجم τ من المائع الجارِ (أو الساكن)، في اللحظة $t>0$ وبلغة القوة الحجمية $\vec{F}(M)$.

ب) بلغة قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ والكثافة الحجمية للمائع $\rho(M)$:

وجدنا في محاضرة سابقة أن تورسور القوى الخارجية المؤثرة بالحجم τ من المائع الجارِ(أو الساكن)، في اللحظة $t>0$ ، بلغة قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ والكثافة الحجمية $\rho(M)$، يعطى بـــ $\left(\overrightarrow{F_e}\,,\overrightarrow{\mathrm{M}_o}\right)$، حيث:

$$\overrightarrow{F_e}=\int_{\tau}\rho(M).\vec{F}(M).d\tau$$

$$\overrightarrow{\mathrm{M}_o}=\int_{\tau}\rho(M).\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\right]d\tau$$

و لنفرض الآن أن:

$$\vec{F} = \vec{F}_e + \vec{F}_i = \int_{\tau} \rho(M).\vec{F}(M)\,d\tau + \int_{S} \overrightarrow{P_n}(M)\,dS$$

$$\vec{\eta}_o = \vec{M}_o + \vec{L}_o = \int_{\tau} \rho(M).\left[\overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}(M)\right] d\tau + \int_{S} \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{P_n}(M)\,dS$$

عندئذٍ نسمي التورسور $\left(\vec{F}, \vec{\eta}_0\right)$ بـ تورسور القوى الكلية المؤثرة في الحجم τ من المائع الجارِ(أو الساكن)، في اللحظة $t > 0$ ، وبلغة قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ والكثافة الحجمية $\rho(M)$.

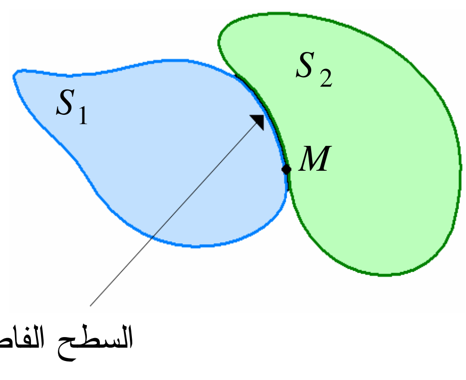
ملاحظة1:

وجدنا في المحاضرة السابقة أن تورسور القوى الداخلية المؤثرة بالحجم τ من المائع يعطى بدلالة المفهوم $\overrightarrow{P_n}(M)$ (والتي هي قوة ضغط τ' على السطح S في النقطة M حيث $\vec{n}$ الناظم الخارجي).

إن القوى الداخلية المؤثرة بـ τ' هي وفقط هي القوى التي يؤثر بها τ على S، وفي هذه الحالة نلجأ لمفهوم $\overrightarrow{P_{-n}}(M)$ (والتي هي قوة الضغط للحجم τ والتي يؤثر بها على S في النقطة M حيث الناظم الخارجي هنا هو $-\vec{n}$).

ملاحظة2: " مبدأ الفعل ورد الفعل في الأوساط المستمرة ".

ليكن S_1 , S_2 وسطان ماديان مستمران مشتركان بالسطح S كما في الشكل التالي:



ولتكن M نقطة مادية من السطح S.

فإذا أثر S_1 على S_2 بقوة $\vec{F}$ من خلال السطح S في النقطة M، فإن S_2 سوف يرد على S_1 بقوة معاكسة $\vec{F'}$ من خلال السطح S في النقطة M، وهذا يعني أن:

$$\vec{F} + \vec{F'} = \vec{0}$$

نتيجة:

$$\overrightarrow{P_n}(M) + \overrightarrow{P_{-n}}(M) = \vec{0}$$

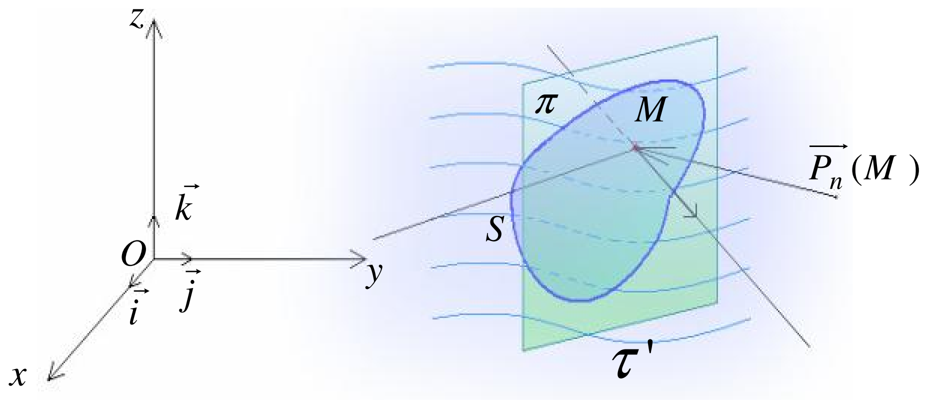
ومنه:

$$\overrightarrow{P_{-n}}(M) = -\overrightarrow{P_n}(M)$$

تعريف: قوة اللزوجة وقوة الضغط الناظمية للمائع في نقطة منه:

ليكن τ حجماً اختيارياً من مائع جارٍ في اللحظة $t > 0$، ولنفرض أن τ محاط بالسطح المغلق S، ولنرمز بــ τ' للجزء المتبقي من المائع. وجدنا أن $\overrightarrow{P_n}(M)$ هي قوة ضغط τ' على S من خلال النقطة M، حيث أن $\vec{n}$ هو الناظم الخارجي، وبالتالي فإن $\overrightarrow{P_n}(M)$ تمر من النقطة M، وفي الحالة العامة $\overrightarrow{P_n}(M)$ يتجه من τ' إلى S ولكن ليس ناظمياً على S في M.

وليكن π المستوي المماس للسطح S في M؛ إن $\vec{n}$ هو الناظم للمستوي π في النقطة M .



وفقاً للهندسة التحليلية فدائماً يمكن تحليل $\overrightarrow{P_n}(M)$ إلى مركبتين متجهيتين، كما يلي:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = \overrightarrow{T_n}(M) + \overrightarrow{N_n}(M)$$

حيث $\overrightarrow{T_n}(M)$ هي المركبة المماسية (الواقعة في المستوي π) لـــ $\overrightarrow{P_n}(M)$.

و $\overrightarrow{N_n}(M)$ هي المركبة الناظمية (المحمولة على الناظم $\vec{n}$) لـــ $\overrightarrow{P_n}(M)$.

عندئذٍ:

ندعوا $\overrightarrow{T_n}(M)$ بقوة اللزوجة للمائع في النقطة المادية M منـــه حيـــث أن النـــاظم الخارجي هنا هو $\vec{n}$.

كما ندعوا $\overrightarrow{N_n}(M)$ بقوة الضغط الناظمية للمائع في النقطة المادية M منه حيث أن الناظم الخارجي هنا هو $\vec{n}$.

ونستنتج مما سبق أن $\overrightarrow{N_n}(M)$ و $\vec{n}$ متعاكسان.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 12 10 2010 .

- جامعة البعث .
- كلية العلوم .
- قسم الرياضيات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة السادسة

مقدمة طبولوجية:

المنطقة في الفضاء المتري:

نقول عن A أنها منطقة في الفضاء المتري (X,d) إذا وفقط إذا كانت A مجموعة مفتوحة ومترابطة في الفضاء (X,d).

1) تعريف المنطقة بسيطة الترابط في فضاء متري (X,d):

ليكن (X,d) فضاءً مترياً ولتكن $\phi \neq A \subseteq X$، نقول عن A أنهـا تـشكل منطقـة بسيطة الترابط في الفضاء المتري (X,d) إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) A منطقة في الفضاء المتري (X,d).

2) $F_r(A)$ يجب أن تكون مجموعة مترابطة في الفضاء المتري (X,d).

مثال:

نحن نعلم أن الفضاء الإقليدي $\mathbb{R}^n$، والذي عرفت عليه المسافة:

$$d:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^n\to\mathbb{R} \ ;$$

$$d(x,y)=\sqrt{(x_1-y_1)^2+(x_2-y_2)^2+\ldots+(x_n-y_n)^2} \ ;$$

$$\{x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)\,,\,y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\}\subset\mathbb{R}^n$$

هو فضاء متري.

ولنأخذ الفضاء المتـري الإقليـدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$ ولـتكن $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2$ ، $r>0$، عندئذٍ فإن الكرة المفتوحة N ذات المركز a ونصف القطر r والمعطاة بـ:

$$N(a,r):=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \ ; \ d\left[(x,y),(a_1,a_2)\right]<r\right\}$$

هي منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$ ؛ وذلك لأن:

1) $N(a,r)$ هي مجموعة مفتوحة ومترابطة، وبالتالي فهي منطقة في الفضاء المتري الإقليدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$.

2) $F_r\left[N(a,r)\right]=S(a,r)=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ d\left[(x,y),(a_1,a_2)\right]=r\right\}$
هي مجموعة مترابطة في الفضاء المتري الإقليدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$.

2) تعريف المنطقة ثنائية الترابط في فضاء متري $(X\ ,d)$:

ليكن $(X\ ,d)$ فضاءً مترياً ولتكن $\phi\neq A\subseteq X$، نقول عن A أنها تشكل منطقة ثنائية الترابط في الفضاء المتري $(X\ ,d)$ إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) A منطقة في الفضاء المتري $(X\ ,d)$.

2) أن تكتب $F_r(A)$ على شكل اجتماع لمجموعتين مترابطتين في الفضاء المتري $(X\ ,d)$ ومنفصلتين (تقاطعهما خالٍ).

مثال:

لنأخذ الفضاء المتري $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$ الإقليدي، ولتكن $a=(a_1,a_2)\in\mathbb{R}^2\ \ ,\ 0<r_1<r_2$
عندئذٍ فإن المجموعة:

$$A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2\ ;\ r_1<d\left[(x,y),(a_1,a_2)\right]<r_2\right\}$$

تشكل منطقة ثنائية الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$ (حيث d هنا هي المسافة الإقليدية)، وذلك لأن:

1) A مجموعة مفتوحة ومترابطة في الفضاء المتري الإقليدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$.

2) نلاحظ أن:

$$F_r(A)=S(a,r_1)\cup S(a,r_2)$$

وكل من $S(a,r_1)$ و $S(a,r_2)$ مجموعة مترابطة في الفضاء المتري الإقليدي $\left(\mathbb{R}^2,d\right)$، وكذلك $S(a,r_1)\cap S(a,r_2)=\phi$.

3) تعريف المنطقة ذات المرتبة n من الترابط في الفضاء المتري (X ,d):

ليكن (X ,d) فضاءً مترياً ولتكن $\phi \neq A \subseteq X$، نقول عن A أنها تشكل منطقة ذات المرتبة n من الترابط في الفضاء المتري (X ,d)، إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) A منطقة في الفضاء المتري (X ,d).

2) أن تكتب $F_r(A)$ على شكل اجتماع لـ n مجموعة مترابطة في الفضاء المتري (X ,d) والمنفصلة مثنى مثنى.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 14 10 2010 .

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــــة العلــــــــــوم .
- قســــــم الرياضيـــــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة السابعة

نتيجة:

بما أن $\vec{n}$ متجه واحدة الناظم، و $\overrightarrow{N_n}(M)$ محمول على $\vec{n}$، ويعاكسه بالاتجاه (نتيجة من محاضرة سابقة)، فبحسب الهندسة التحليلية يكون:

$$\overrightarrow{N_n}(M) = -\left|\overrightarrow{N_n}(M)\right| . \vec{n} \quad .... \; (1)$$

تعريف: (شدة اللزوجة "أو اختصاراً اللزوجة").

نسمي $T_n(M) := \left|\overrightarrow{T_n}(M)\right|$ بشدة لزوجة المائع، أو اختصاراً بلزوجة المائع في النقطة M حيث الناظم الخارجي $\vec{n}$.

تعريف: (المائع المثالي، والمائع اللزج).

نقول عن مائع ما (جارٍ أو ساكن) أنه مائع مثالي إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
في كل لحظة جريان $t > 0$ فإن $\overrightarrow{T_n}(M) = \overrightarrow{0}$ من أجل كل نقطة مادية M من المائع في هذه اللحظة، وكل متجه واحدة ناظم $\vec{n}$.

وإذا اختل الشرط السابق، دعونا المائع مائعاً لزجاً.

نتيجة1:

وجدنا في الحالة العامة أن: $\overrightarrow{P_n}(M) = \overrightarrow{T_n}(M) + \overrightarrow{N_n}(M)$.
وكذلك: $\overrightarrow{N_n}(M) = -\left|\overrightarrow{N_n}(M)\right| . \vec{n}$.
فبدمج هاتين العلاقتين بالتعريف السابق نصل إلى النتيجة التالية:

يكون المائع مثالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:
في كل لحظة جريان $t > 0$ فإن: $\overrightarrow{P_n}(M) = -\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| . \vec{n}$ وذلك من أجل كل نقطة مادية M من المائع، وكل متجه واحدة ناظم $\vec{n}$.

ملاحظة:

إذا كان المائع ساكن (جميع نقاطه ساكنة)، فإنه يكون مائعاً مثالياً.

نتيجة2:

بالاعتماد على الملاحظة السابقة نجد أنه إذا كان المائع لزجاً فهو مائع جارٍ.

نتيجة3:

قولنا بأن المائع هو مائع مثالي $\Leftrightarrow$ قولنا بأن المائع ساكن، أو مثالي جارٍ.

ملاحظة:

في الحالة العامة $\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$ تتغير بتغير M، وبتغيـــر $\vec{n}$ ؛ إذاً $\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$ هـــي تابع لكل من M و $\vec{n}$.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن هو التالي:

إذا كان المائع مثالياً، فهل تبقى هذه الملاحظة صحيحة ؟!

يجيبنا على هذا السؤال، قانون باسكال الأول، من خلال المبرهنة التالية:

مبرهنة قانون باسكال الأول: (تقبل دون ذكر البرهان).

إذا كان المائع مثالياً فإنه في كل لحظة $t>0$ تكون $\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$ تتبـــع لـــــ M فقط، دون أن تتبع لـــ $\vec{n}$.

ويمكن التعبير عن قانون باسكال الأول فيزيائياً على الشكل التالي:

إذا كان المائع مثالياً فإنه في كل لحظة $t>0$ ومن أجل كل نقطة مادية M مـــن هذا المائع، تكون شدة الضغط متساوية في جميع الاتجاهات.

نتيجة: (عن مبرهنة قانون باسكال الأول).

إذا كـــان المـــائع مثاليـــاً فإنـــه فـــي كـــل لحظـــة جريـــان $t>0$ يكـــون: $\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| = P(M)$، وذلك من أجل كل M من المائع المثالي، وكل متجه واحدة ناظم $\vec{n}$.

نتيجة:

يكون المائع مثالياً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

من أجل كـــل لحظـــة جريـــان $t > 0$ يكـــون: $\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M) . \vec{n}$، حيـــث $\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| = P(M)$ وذلك من أجل كل نقطة مادية M من المائع، وكـــل متجـــه واحدة ناظم $\vec{n}$.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 17 10 2010 .

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــــة العلـــــــــوم .
- قســـــم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثامنة

نتيجة1:

ليكن لدينا مائعاً ما مثالياً. في اللحظة $t>0$، لنأخذ حجم اختياري τ من هذا المائع، محاطاً بالسطح المغلق S، وليكن $\vec{n}$ متجه واحدة ناظم السطح S في النقطة المادية $M\equiv(x,y,z)$ من S، ولنفرض أن $\vec{n}$ يتجه نحو خارج τ؛ عندئذٍ يكون تورسور القوى الداخلية المؤثرة بـ τ هو $\left(\vec{F_i}\ ,\vec{L_o}\right)$، حيث:

$$\vec{F_i}=\int_S \vec{P_n}(M)\,dS=-\int_S P(M)\vec{n}\,dS$$

$$\vec{L_o}=\int_S \overrightarrow{OM}\wedge\vec{P_n}(M)\,dS=-\int_S P(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{n}\right]dS$$

حيث في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\vec{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}$$

$$P(M):=\left|\vec{P_n}(M)\right|$$

وذلك من أجل كل نقطة مادية M من هذا المائع المثالي، مأخوذةً في اللحظة $t>0$.

مقدمة في التحليل المتجهي:

تعريف1: (تدرج دالة سلمية في منطقة بسيطة الترابط من الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$).

لتكن لدينا جملة ديكارتية قائمة، يمينية مباشرة $Oxyz$ والتي قاعدتها $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. ولتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$، ولتكن لدينا الدالة السلمية:

$$f:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\equiv(x,y,z)\mapsto f(M)$$

ولنفرض أن الدالة السلّميّة f من الصف C^1 في المنطقة D؛ عندئذٍ نسمي الدالة المتجهية:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f:=\frac{\partial f}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\vec{k}:D\to\mathbb{R}^3$$

والمعرفة بالشكل:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f\ (M)=\frac{\partial f}{\partial x}(M)\,\vec{i}+\frac{\partial f}{\partial y}(M)\,\vec{j}+\frac{\partial f}{\partial z}(M)\,\vec{k}$$

بـــ تدرج الدالة السلميّة f في المنطقة بسيطة الترابط D.

نتيجة2:

التدرج $\overrightarrow{\text{grad}}\, f$ ينقلنا من دالة سلّميّة إلى دالة متجهية.

تعريف21: (تفرق دالة متجهية – دوران دالة متجهية : في منطقة بـــسيطة التــرابط مــن الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$).

لتكن لدينا جملة ديكارتية قائمة، يمينية مباشرة $Oxyz$ والتي قاعدتها $\left(\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right)$. ولـــتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$، ولتكن:

$$f_i : D\to\mathbb{R}\ ;\ M\equiv(x,y,z)\mapsto f_i(M)\quad ;\quad i=1,2,3$$

ثلاث دوال حقيقية من الصف C^1 في المنطقة D؛ ولنشكل الدالة المتجهية:

$$\vec{f} := f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k} : D\to\mathbb{R}^3\ ;$$

$$M\equiv(x,y,z)\mapsto\vec{f}(M)=f_1(M)\vec{i}+f_2(M)\vec{j}+f_3(M)\vec{k}$$

عندئذٍ نسمي بالتعريف ما يلي:

<u>أولاً</u>: نسمي الدالة السلميّة:

$$\text{div}\,\vec{f} := \frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z} : D\to\mathbb{R}$$

والمعرفة بالشكل:

$$\text{div}\,\vec{f}(M)=\frac{\partial f_1}{\partial x}(M)+\frac{\partial f_2}{\partial y}(M)+\frac{\partial f_3}{\partial z}(M)$$

بتفرق الدالة المتجهية $\vec{f}$ في المنطقة بسيطة الترابط D.

ثانياً: نسمي الدالة المتجهية:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f} := \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} : D \to \mathbb{R}^3$$

و المعرفة بالشكل:

$$\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}\right)(M) = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ f_1 & f_2 & f_3 \end{vmatrix} (M)$$

بـــ دوران الدالة المتجهية $\overrightarrow{f}$ في المنطقة بسيطة الترابط D.

نتيجة3:

التفرق $\text{div}\,\vec{f}$ ينقلنا من دالة متجهية إلى دالة سلمية. (بعكس التدرج).

الدوران $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{f}$ يحافظ على الصفة المتجهية، أي ينقلنا من دالة متجهية إلى دالة متجهية.

تمرين1:

لتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$، الممثل بالجملة $Oxyz$، ولتكن الدالتان:

$$f:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto f(M)$$
$$g:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto g(M)$$

من الصف C^1 في المنطقة D.

عندئذٍ أثبت أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f.g)=f.\overrightarrow{\text{grad}}\,g+g.\overrightarrow{\text{grad}}f$$

تمرين2:

لتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$، الممثل بالجملة $Oxyz$، ولتكن لدينا الدوال الحقيقية:

$$f:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto f(M)$$
$$g_1:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto g_1(M)$$
$$g_2:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto g_2(M)$$
$$g_3:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto g_3M)$$

التي هي من الصف C^1 في D، ولنشكل الدالة المتجهية:

$$\vec{g}:=g_1\vec{i}+g_2\vec{j}+g_3\vec{k}:D\to\mathbb{R}^3\ ;$$
$$M\mapsto\vec{g}(M)=g_1(M)\,\vec{i}+g_2(M)\,\vec{j}+g_3(M)\,\vec{k}$$

والمطلوب ما يلي:

1) أثبت أن:

$$\text{div}\,(f.\vec{g})=f.\text{div}\,\vec{g}+\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right).\vec{g}$$

2) أثبت أن:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(f.\vec{g})=f.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{g}+\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,f\right)\wedge\vec{g}$$

مبرهنة غوص:

لتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3,d)$، والممثل بالجملة $Oxyz$؛ ولنفرض أن D محاطة بالسطح المغلق S، ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in S$، و $\vec{n}=\alpha\vec{i}+\beta\vec{j}+\gamma\vec{k}$ هو متجه واحدة ناظم السطح S في النقطة M، والموجه نحو خارج المنطقة D. ولتكن الدوال:

$$f_i:\bar{D}\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto f_i(M)\quad ;\quad i=1,2,3.$$

هي ثلاثة دوال حقيقية من الصف C^1 في D، ومن الصف C^0 في $\bar{D}$، ($\bar{D}=D\cup S$).

ولنشكل الدالة المتجهية:

$$\vec{f}:=f_1\vec{i}+f_2\vec{j}+f_3\vec{k}\ :D\to\mathbb{R}^3$$

$$M\mapsto\vec{f}(M)=f_1(M)\,\vec{i}+f_2(M)\,\vec{j}+f_3(M)\,\vec{k}$$

والدالة السلميّة:

$$\vec{f}.\vec{n}:S\to\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto\left(\vec{f}.\vec{n}\right)(M)=\alpha.f_1(M)+\beta.f_2(M)+\gamma.f_3(M)$$

عندئذٍ:

1) كلا التكاملين $\int_D \mathrm{div}\vec{f}(M)d\tau\ ,\ \int_S\left(\vec{f}.\vec{n}\right)(M)\,dS$ موجود.

2) المساواة التالية محققة:

$$\int_S\left(\vec{f}.\vec{n}\right)(M)\,dS=\int_D\mathrm{div}\vec{f}(M)\,d\tau$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 19 10 2010 .

- جامعـــة البعـــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة التاسعة

تمرين1:

لتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليدي $(\mathbb{R}^3, d)$ الممثل بالجملة $Oxyz$، ولتكن الدالتان:

$$f : D \to \mathbb{R} \;;\; M \mapsto f(M)$$

$$g : D \to \mathbb{R} \;;\; M \mapsto g(M)$$

من الصف C^1 في المنطقة D.

عندئذٍ أثبت أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f.g) = f.\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g.\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

الحل:

لدينا:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f.g) = \frac{\partial}{\partial x}(f.g)\,\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}(f.g)\,\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}(f.g)\,\vec{k}$$

$$= \left[f\,\frac{\partial g}{\partial x} + g\,\frac{\partial f}{\partial x}\right]\vec{i} + \left[f\,\frac{\partial g}{\partial y} + g\,\frac{\partial f}{\partial y}\right]\vec{j} + \left[f\,\frac{\partial g}{\partial z} + g\,\frac{\partial f}{\partial z}\right]\vec{k}$$

$$= f\left(\frac{\partial g}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\vec{k}\right) + g\left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}\right)$$

ولكن:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,g = \left(\frac{\partial g}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial g}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial g}{\partial z}\,\vec{k}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}\,\vec{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\,\vec{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\,\vec{k}\right)$$

بالتعويض في عبارة $\overrightarrow{\text{grad}}\,(f.g)$ نجد:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,(f.g) = f.\overrightarrow{\text{grad}}\,g + g.\overrightarrow{\text{grad}}\,f$$

وهو المطلوب.

تمرين2:

لتكن D منطقة بسيطة الترابط في الفضاء المتري الإقليـــدي $(\mathbb{R}^3,d)$، الممثــل بالجملـــة $Oxyz$، ولتكن الدوال:

$$f : D \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; M \mapsto f(M)$$

$$g_1 : D \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; M \mapsto g_1(M)$$

$$g_2 : D \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; M \mapsto g_2(M)$$

$$g_3 : D \to \mathbb{R} \;\; ; \;\; M \mapsto g_3 M)$$

هي دوال حقيقية من الصف C^1 في D، ولنشكل الدالة المتجهية:

$$\vec{g} : g_1\vec{i} + g_2\vec{j} + g_3\vec{k} : D \to \mathbb{R}^3 \;\; ;$$

$$M \mapsto \vec{g}(M) = g_1(M)\,\vec{i} + g_2(M)\,\vec{j} + g_3(M)\,\vec{k}$$

والمطلوب ما يلي:

1) أثبت أن:

$$\operatorname{div}(f.\vec{g}) = f.\operatorname{div}\vec{g} + \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\right).\vec{g}$$

2) أثبت أن:

$$\overrightarrow{\operatorname{rot}}(f.\vec{g}) = f.\overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\vec{g} + \left(\overrightarrow{\operatorname{grad}} f\right) \wedge \vec{g}$$

الحل:

لدينا:

$$f\,\vec{g} = f\left(g_1\vec{i} + g_2\vec{j} + g_3\vec{k}\right) = f\,g_1\,\vec{i} + f\,g_2\,\vec{j} + f\,g_3\,\vec{k}$$

وبالتالي يكون:

$$\operatorname{div}(f\,\vec{g}) = \frac{\partial}{\partial x}(f\,g_1) + \frac{\partial}{\partial y}(f\,g_2) + \frac{\partial}{\partial z}(f\,g_3)$$

$$= f\,\frac{\partial g_1}{\partial x} + g_1\frac{\partial f}{\partial x} + f\,\frac{\partial g_2}{\partial y} + g_2\frac{\partial f}{\partial y} + f\,\frac{\partial g_3}{\partial z} + g_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

$$= f\left(\frac{\partial g_1}{\partial x} + \frac{\partial g_2}{\partial y} + \frac{\partial g_3}{\partial z}\right) + \left(g_1\frac{\partial f}{\partial x} + g_2\frac{\partial f}{\partial y} + g_3\frac{\partial f}{\partial z}\right)$$

ولكن:

$$\operatorname{div}\vec{g}=\frac{\partial g_1}{\partial x}+\frac{\partial g_2}{\partial y}+\frac{\partial g_3}{\partial z}$$

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}f\right).\vec{g}=g_1\frac{\partial f}{\partial x}+g_2\frac{\partial f}{\partial y}+g_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

عندئذٍ بالتعويض في عبارة $\operatorname{div}\left(f\,.\vec{g}\right)$ نجد:

$$\operatorname{div}\left(f\,.\vec{g}\right)=f\,.\operatorname{div}\vec{g}+\left(\overrightarrow{\text{grad}}f\right).\vec{g}$$

وهو المطلوب الأول.

كما أن:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(f\,.\vec{g}\right)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ f\,g_1 & f\,g_2 & f\,g_3\end{vmatrix}$$

$$=\left[\frac{\partial}{\partial y}f\,g_3+\frac{\partial}{\partial z}f\,g_2\right]\vec{i}+\left[\frac{\partial}{\partial z}f\,g_1+\frac{\partial}{\partial x}f\,g_3\right]\vec{j}$$
$$+\left[\frac{\partial}{\partial x}f\,g_2+\frac{\partial}{\partial y}f\,g_1\right]\vec{k}$$

$$=f\,\frac{\partial g_3}{\partial y}\vec{i}+g_3\frac{\partial f}{\partial y}\vec{i}-f\,\frac{\partial g_2}{\partial z}\vec{i}-g_2\frac{\partial f}{\partial z}\vec{i}+f\,\frac{\partial g_1}{\partial z}\vec{j}+g_1\frac{\partial f}{\partial z}\vec{j}$$
$$-f\,\frac{\partial g_3}{\partial x}\vec{j}-g_3\frac{\partial f}{\partial x}\vec{j}+f\,\frac{\partial g_2}{\partial x}\vec{k}+g_2\frac{\partial f}{\partial x}\vec{k}-f\,\frac{\partial g_1}{\partial y}\vec{k}-g_1\frac{\partial f}{\partial y}\vec{k}$$

$$=f\left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$
$$+\left[\left(g_3\frac{\partial f}{\partial y}-g_2\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(g_1\frac{\partial f}{\partial z}-g_3\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(g_2\frac{\partial f}{\partial x}-g_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

ولكن:

$$f.\left(\overrightarrow{\text{rot}}\ \vec{g}\right)=f.\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}$$

$$=f\left[\left(\frac{\partial g_3}{\partial y}-\frac{\partial g_2}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial g_1}{\partial z}-\frac{\partial g_3}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial g_2}{\partial x}-\frac{\partial g_1}{\partial y}\right)\vec{k}\right]$$

وكذلك:

$$\left(\overrightarrow{\text{grad}}f\right)\wedge\vec{g}=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial f}{\partial x} & \dfrac{\partial f}{\partial y} & \dfrac{\partial f}{\partial z}\\ g_1 & g_2 & g_3\end{vmatrix}$$

$$=\left(g_3\frac{\partial f}{\partial y}-g_2\frac{\partial f}{\partial z}\right)\vec{i}+\left(g_1\frac{\partial f}{\partial z}-g_3\frac{\partial f}{\partial x}\right)\vec{j}+\left(g_2\frac{\partial f}{\partial x}-g_1\frac{\partial f}{\partial y}\right)\vec{k}$$

بالتعويض في عبارة $\overrightarrow{\text{rot}}(f.\vec{g})$ نجد:

$$\overrightarrow{\text{rot}}(f.\vec{g})=f.\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{g}\right)+\left(\overrightarrow{\text{grad}}f\right)\wedge\vec{g}$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 21 10 2010 .

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــــة العلـــــــــوم .
- قســــــم الرياضيـــــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة العاشرة

وجدنا في محاضرة سابقة أنه لو كانت فرضيات نظرية غوص محققة، فإن المساواة التالية محققة:

$$\int_S \left(\vec{f}.\vec{n}\right)(M)\ dS = \int_D \mathrm{div}\vec{f}(M)\ d\tau$$

علماً أن التكاملين السابقين موجودين.

ويمكننا كتابة هذه المساواة على الشكل التالي:

$$\int_S \left[(\alpha f_1)+(\beta f_2)+(\gamma f_3)\right] dS = \int_D \left(\frac{\partial f_1}{\partial x}+\frac{\partial f_2}{\partial y}+\frac{\partial f_3}{\partial z}\right) d\tau$$

علماً أن:

$$\vec{f} := f_1\vec{i} + f_2\vec{j} + f_3\vec{k}$$

$$\vec{n} := \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$$

مبرهنة:

ليكن لدينا مائعاً مثالياً ما منسوباً للجملة الديكارتية القائمة $Oxyz$ واليمينية المباشرة، والتي قاعدتها $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$، والعطالية. في لحظة الجريان $t>0$، نأخذ من هذا المائع حجماً اختيارياً τ على شكل منطقة بسيطة الترابط، في الفضاء $(\mathbb{R}^3, d)$، ولنفرض أن τ محاط بالسطح المغلق S، ولتكن $M \equiv (x,y,z)$ نقطة مادية من S.

ولنأخذ $\vec{n} = \alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}$ متجه واحدة ناظم السطح S في النقطة M والموجه نحو خارج τ. عندئذٍ فإن تورسور القوى الداخلية المؤثرة بـ τ هو $\left(\vec{F_i}, \vec{L_o}\right)$، حيث:

$$\vec{F_i} = -\int_\tau \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)\ d\tau$$

$$\vec{L_o} = -\int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)\ d\tau$$

البرهان:

نحن نعلم بحسب نتيجة وصلنا إليها في محاضرة سابقة أن تورسور القوى الداخلية المؤثرة بالحجم τ هو:

$$\left.\begin{aligned} \vec{F_i} &= -\int_S P(M).\vec{n}\ dS \\ \vec{L_o} &= -\int_S P(M)\left(\overrightarrow{OM} \wedge \vec{n}\right)\ dS \end{aligned}\right\} \quad \text{..........} \quad (1)$$

حيث أن:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \quad , \quad P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

وذلك من أجل كل نقطة مادية M من المائع المثالي، ومن أجل كل متجه واحدة ناظم $\vec{n}$.

ولنبدأ ببرهان العلاقة الأولى:

لدينا:

$$\left.\begin{aligned}\overrightarrow{F_i} &= -\int_S P(M)\left(\alpha\vec{i} + \beta\vec{j} + \gamma\vec{k}\right) dS \\ &= -\left\{\left[\int_S P(M).\alpha\, dS\right]\vec{i} + \left[\int_S P(M).\beta\, dS\right]\vec{j} + \left[\int_S P(M).\gamma\, dS\right]\vec{k}\right\}\end{aligned}\right) \quad ......\ (2)$$

وسنثبت العلاقة الأولى من خلال تحويل التكامل السطحي على S الموجود في (1)، إلى تكامل حجمي على τ، مستخدمين مبرهنة غوص.

لنضع:

$$\overrightarrow{a_1}(M) := [P(M), 0, 0]$$
$$\overrightarrow{a_2}(M) := [0, P(M), 0]$$
$$\overrightarrow{a_3}(M) := [0, 0, P(M)]$$

فباستخدام مبرهنة غوص، يصبح لدينا:

$$\int_S P(M).\alpha\, dS = \int_S \overrightarrow{a_1}(M).\overrightarrow{n}\, dS = \int_\tau \mathrm{div}\overrightarrow{a_1}(M)\, d\tau = \int_\tau \frac{\partial P}{\partial x}(M)\, d\tau$$
$$\int_S P(M).\beta\, dS = \int_S \overrightarrow{a_2}(M).\overrightarrow{n}\, dS = \int_\tau \mathrm{div}\overrightarrow{a_2}(M)\, d\tau = \int_\tau \frac{\partial P}{\partial y}(M)\, d\tau$$
$$\int_S P(M).\gamma\, dS = \int_S \overrightarrow{a_3}(M).\overrightarrow{n}\, dS = \int_\tau \mathrm{div}\overrightarrow{a_3}(M)\, d\tau = \int_\tau \frac{\partial P}{\partial z}(M)\, d\tau$$

نعوض في (2) فنجد:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_i} &= -\left\{\left[\int_\tau \frac{\partial P}{\partial x}(M)\, d\tau\right]\vec{i} + \left[\int_\tau \frac{\partial P}{\partial y}(M)\, d\tau\right]\vec{j} + \left[\int_\tau \frac{\partial P}{\partial z}(M)\, d\tau\right]\vec{k}\right\} \\ &= -\int_\tau \left[\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,\vec{i} + \frac{\partial P}{\partial y}(M)\,\vec{j} + \frac{\partial P}{\partial z}(M)\,\vec{k}\right] d\tau = -\int_\tau \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P(M)\, d\tau\end{aligned}$$

ولنثبت الآن العلاقة الثانية:

لدينا:

$$\overrightarrow{\mathrm{L}_o}=-\int_S P(M)\left(\overrightarrow{OM}\wedge\vec{n}\right)dS=-\int_S P(M)\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ x & y & z\\ \alpha & \beta & \gamma\end{vmatrix}dS$$

$$=-\int_S P(M)\left[(y\gamma-z\beta)\vec{i}+(z\alpha-x\gamma)\vec{j}+(x\beta-y\alpha)\vec{k}\right]dS$$

$$=-\left\{\left[\int_S P(M)(y\gamma-z\beta)\,dS\right]\vec{i}+\left[\int_S P(M)(z\alpha-x\gamma)\,dS\right]\vec{j}\right.$$

$$\left.+\left[\int_S P(M)(x\beta-y\alpha)dS\right]\vec{k}\right\} \qquad \text{..........} \quad (3)$$

وبنفس الطريقة سنبرهن صحة العلاقة الثانية من خلال تحويل التكاملات السطحية الموجــودة في (3)، من تكاملات سطحية على S إلى تكاملات حجمية في τ.

لنضع:

$$\overrightarrow{b_1}(M):=\left[0\,,-z.P(M)\,,\,y.P(M)\right]$$

$$\overrightarrow{b_2}(M):=\left[z.P(M)\,,0\,,-x.P(M)\right]$$

$$\overrightarrow{b_3}(M):=\left[-y.P(M)\,,x.P(M)\,,0\right]$$

فيصبح، لدينا:

$$\int_S P(M).(y\gamma-z\beta)\,dS=\int_S\overrightarrow{b_1}(M).\vec{n}\,dS=\int_\tau \mathrm{div}\overrightarrow{b_1}(M)\,d\tau$$

$$=\int_\tau\left[y\frac{\partial P}{\partial z}(M)-z\frac{\partial P}{\partial y}(M)\right]d\tau,$$

$$\int_S P(M).(z\alpha-x\gamma)\,dS=\int_S\overrightarrow{b_2}(M).\vec{n}\,dS=\int_\tau \mathrm{div}\overrightarrow{b_2}(M)\,d\tau$$

$$=\int_\tau\left[z\frac{\partial P}{\partial x}(M)-x\frac{\partial P}{\partial z}(M)\right]d\tau$$

$$\int_S P(M).(x\beta - y\alpha)\,dS = \int_S \overrightarrow{b_3}(M).\overrightarrow{n}\,dS = \int_\tau \mathrm{div}\overrightarrow{b_3}(M)\,d\tau$$
$$= \int_\tau \left[x\frac{\partial P}{\partial y}(M) - y\frac{\partial P}{\partial x}(M) \right] d\tau$$

نعوض في (3) ، فنجد:

$$\overrightarrow{\mathrm{L}_o} = -\int_\tau \left\{ \left[y\frac{\partial P}{\partial z}(M) - z\frac{\partial P}{\partial y}(M) \right]\vec{i} + \left[z\frac{\partial P}{\partial x}(M) - x\frac{\partial P}{\partial z}(M) \right]\vec{j} + \left[x\frac{\partial P}{\partial y}(M) - y\frac{\partial P}{\partial x}(M) \right]\vec{k} \right\} d\tau \qquad \text{..........} \quad (4)$$

وبما أن:

$$\left[y\frac{\partial P}{\partial z}(M) - z\frac{\partial P}{\partial y}(M) \right]\vec{i} + \left[z\frac{\partial P}{\partial x}(M) - x\frac{\partial P}{\partial z}(M) \right]\vec{j} + \left[x\frac{\partial P}{\partial y}(M) - y\frac{\partial P}{\partial x}(M) \right]\vec{k} =$$
$$= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x & y & z \\ \frac{\partial P}{\partial x}(M) & \frac{\partial P}{\partial y}(M) & \frac{\partial P}{\partial z}(M) \end{vmatrix} = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)$$

ومنه تصبح (4) بالشكل:

$$\overrightarrow{\mathrm{L}_o} = -\int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)\,d\tau$$

وهو المطلوب.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 26 10 2010 .

- جامعــــة البعـــــــث .
- كليـــة العلــــــــوم .
- قســــم الرياضيــــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الحادية عشر + الثانية عشر

نتيجة: (حول تورسور القوى الكلية المؤثرة بالحجم τ).

ليكن لدينا مائعاً ما مثالياً منسوباً للجملة $Oxyz$. في اللحظة $t>0$ ، نأخذ τ حجماً اختيارياً من هذا المائع، على شكل منطقة بسيطة الترابط في الفضاء $(\mathbb{R}^3,d)$، ولنفرض أن τ محاط بالسطح المغلق S، ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in S$ نقطة مادية و $\overrightarrow{n}$ متجه واحدة ناظم السطح S في النقطة M والموجه نحو خارج τ.

عندئذٍ يعطى تورسور القوى الكلية المؤثرة في τ بـ:

1) لغة القوة الحجمية:

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_e}+\overrightarrow{F_i}=\int_\tau\left[\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau$$

$$\overrightarrow{m_o}=\overrightarrow{\mu_o}+\overrightarrow{\text{L}_o}=\int_\tau\overrightarrow{OM}\wedge\left[\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau$$

2) لغة قوة الكتلة و الكثافة الحجمية:

$$\overrightarrow{F}=\overrightarrow{F_e}+\overrightarrow{F_i}=\int_\tau\left[\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau$$

$$\overrightarrow{m_o}=\overrightarrow{\mu_o}+\overrightarrow{\text{L}_o}=\int_\tau\overrightarrow{OM}\wedge\left[\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau$$

توازن الموائع.

تعريف1: (المائع الساكن).

نقول عن مائع ما أنه ساكن إذا وفقط إذا كانت كل نقطة من نقاطه ساكنة.

نتيجة1:

ليكن لدينا مائعاً منسوباً للجملة الإحداثية الديكارتية القائمة اليمينية، المباشرة، والعطالية $Oxyz$، والتي قاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$. عندئذٍ يكون هذا المائع ساكناً إذا وفقط إذا تحققت الشروط التالية:

1) المائع مثالي ؛ أي أنه في كل لحظة جريان $t>0$ ، يتحقق الشرط التالي:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \quad ; \quad |\vec{n}|=1$$

2) أن يتحقق:

$$\overrightarrow{V_0}(M)=\vec{0} \; ; \; \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع}$$

(حيث هنا $\overrightarrow{V_0}(M)$ هي السرعة الابتدائية للنقطة المادية M؛ أي سرعة النقطة المادية M في اللحظة الابتدائية $t=0$)

3) أن يتحقق الشرط التالي في كل لحظة جريان $t>0$: إذا كان τ حجماً اختيارياً من المائع،مأخوذاً في لحظة الجريان $t>0$، على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3,d)$ فإن تورسور القوى الكليّة المؤثرة بـ τ هو التورسور الصفري.

نتيجة2: (شرط سكون المائع بلغة القوة الحجمية).

يكون المائع ساكناً إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) $\overrightarrow{V_0}(M)=\vec{0}$ ، وذلك من أجل كل نقطة M من المائع.

2) من أجل أي لحظة جريان $t>0$ ، فإن الشرط التالي محقق:

إذا كان τ حجماً اختيارياً من المائع على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3, d)$ فإن:

$$\int_\tau \left[\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M)\right] d\tau = \vec{0}$$

$$\int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \left[\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M)\right] d\tau = \vec{0}$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$\forall M \equiv (x, y, z) \in$ للمائع $\quad \wedge \quad \forall \vec{n} \; ; \; |\vec{n}| = 1$

نتيجة3: (شرط سكون المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية).

يكون المائع ساكناً إذا وفقط إذا تحقق الشرطان التاليان:

1) $\overrightarrow{V_0}(M) = \vec{0}$، وذلك من أجل كل نقطة M من المائع.

2) من أجل أي لحظة جريان $t > 0$ ، فإن الشرط التالي محقق:

إذا كان τ حجماً اختيارياً من المائع على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3, d)$ فإن:

$$\int_\tau \left[\rho(M)\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M)\right] d\tau = \vec{0}$$

$$\int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \left[\rho(M)\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M)\right] d\tau = \vec{0}$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$\forall M \equiv (x, y, z) \in$ للمائع $\quad \wedge \quad \forall \vec{n} \; ; \; |\vec{n}| = 1$

نتيجة4: (شرط توازن المائع بلغة القوة الحجمية).

يكون المائع متوازناً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كان τ حجماً اختيارياً من المائع على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3, d)$ فإن:

$$\int_{\tau}\left[\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\vec{0}$$

$$\int_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\left[\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\vec{0}$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع $\quad\wedge\quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$

نتيجة5: (شرط توازن المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية).

يكون المائع متوازناً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

أياً كان τ حجماً اختيارياً من المائع على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3,d)$ فإن:

$$\int_{\tau}\left[\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\vec{0}$$

$$\int_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\left[\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\vec{0}$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع $\quad\wedge\quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$

مبرهنة: (الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية).

يكون المائع متوازناً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$\rho(M).\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع

بحيث:

$(*)\quad ....$

$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع $\quad\wedge\quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$

<u>البرهان:</u>

لزوم الشرط:

نفرض أن المائع متوازن، ولنثبت انطلاقاً من ذلك، أن الشرط $(*)$ محقق.

بما أن المائع متوازن فبحسب شرط التوازن بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية يكون الشرط التالي محققاً:

أياً كان τ حجماً اختيارياً من المائع على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3, d)$ فإن:

$$\int_\tau \left[\rho(M)\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right] d\tau = \vec{0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

$$\int_\tau \overrightarrow{OM} \wedge \left[\rho(M)\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right] d\tau = \vec{0} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

حيث:

$$\left.\begin{array}{l} \overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \ \ ; \ \ P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{المائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \ ; \ |\vec{n}| = 1 \end{array}\right\} \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2')$$

بما أن τ منطقة اختيارية بسيطة الترابط من المائع، فيكون (1) , (2) محققان إذا وفقط إذا:

$$\left.\begin{array}{l} \rho(M)\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) = \vec{0} \\ \overrightarrow{OM} \wedge \left[\rho(M)\vec{F}(M) - \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right] = \vec{0} \end{array}\right\} \quad \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع المتوازن}$$

من العلاقتين الأخيرتين ومن الشروط $(2')$ نجد أن الشرط $(*)$ محقق.

كفاية الشرط:

بفرض أن الشرط $(*)$ محقق. ولنثبت أن المائع متوازن.

ليكن τ حجماً اختيارياً من المائع على شكل منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3, d)$ عندئذٍ من $(*)$ نجد أن:

$$\rho(M).\vec{F}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \ \ ; \ \ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع}$$

بحيث:

$$\left\{\begin{array}{l} \overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \ \ ; \ \ P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \ ; \ |\vec{n}| = 1 \end{array}\right.$$

وبالتالي

$$\int_{\tau}\left[\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\int_{\tau}\vec{0}\,d\tau=\vec{0}$$

$$\int_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\left[\rho(M)\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\int_{\tau}\vec{0}\,d\tau=\vec{0}$$

وبالتالي بحسب النتيجة5، يكون المائع متوازناً.

نتيجة6: (الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة القوة الحجمية).

يكون المائع متوازناً إذا وفقط إذا تحقق الشرط التالي:

$$\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع}$$

بحيث:

$$\begin{cases}\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\ ;\ P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|\\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع}\quad\wedge\quad\forall\vec{n}\ ;\ \left|\vec{n}\right|=1\end{cases}$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 31 10 2010 .

- جامعـــــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلــــــــــوم.
- قســــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثالثة عشر

شروط التوازن السلميّة الديكارتية للمائع، بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة المعطاة بـــ:

$$\vec{F}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع المتوازن. ولنفــرض أن الكثافــة الحجمية لهذا المائع في كل نقطة مادية M منه هي $\rho(M)$. بما أن المائع متوازن فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية يكون:

$$\rho(M).\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\quad;\quad\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}\quad\ldots\ldots\ (*)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}\ \wedge\ \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$$

وبما أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,\vec{i}+\frac{\partial P}{\partial y}(M)\,\vec{j}+\frac{\partial P}{\partial z}(M)\,\vec{k}$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}$$

فبإسقاط طرفي العلاقة (*) على المحاور $\overrightarrow{Oz}$,$\overrightarrow{Oy}$,$\overrightarrow{Ox}$ للجملة المعطاة $Oxyz$ نجد على الترتيب (بدءاً من اليسار):

$$\left.\begin{aligned}\rho(M).X(M)&=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\\ \rho(M)Y(M)&=\frac{\partial P}{\partial y}(M)\\ \rho(M).Z(M)&=\frac{\partial P}{\partial z}(M)\end{aligned}\right\}\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}\quad\ldots\ldots\ldots\ (1)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}\ \wedge\ \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$$

ندعو العلاقات (1) بشروط توازن المائع السلميّة الديكارتية بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية.

شروط التوازن السلميّة الديكارتية للمائع، بلغة القوة الحجمية:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير القوة الحجمية، المعطاة بـــ:

$$\vec{F}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}$$

(نستخدم نفس رمز قوة الكتلة إذا لم يكن هناك التباس).

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع المتوازن. بما أن المائع متـــوازن فبحسب نتيجة الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة القوة الحجمية يكون:

$$\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\quad;\quad\forall M\equiv(x,y,z)\in\text{ للمائع المتوازن }\quad\ldots\ldots\ (*')$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in\text{ للمائع المتوازن }\ \wedge\ \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$$

وبما أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,\vec{i}+\frac{\partial P}{\partial y}(M)\,\vec{j}+\frac{\partial P}{\partial z}(M)\,\vec{k}$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in\text{ للمائع المتوازن}$$

فبإسقاط طرفي العلاقة $(*')$ على المحاور $\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{Oz}$ للجملة المعطاة $Oxyz$ نجد على الترتيب (بدءاً من اليسار):

$$\left.\begin{aligned}X(M)&=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\\ Y(M)&=\frac{\partial P}{\partial y}(M)\\ Z(M)&=\frac{\partial P}{\partial z}(M)\end{aligned}\right\}\ \forall M\equiv(x,y,z)\in\text{ للمائع المتوازن }\quad\ldots\ldots\ldots\ (2)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in\text{ للمائع المتوازن }\ \wedge\ \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$$

ندعو العلاقات (2) بشروط توازن المائع السلميّة الديكارتية بلغة القوة الحجمية.

تعريف: (السطح الحر للمائع).

ليكن لدينا مائعاً ما يختلف عن الهواء. ندعو السطح الفاصل ما بين هذا المائع والهواء بالسطح الحر لهذا المائع.

ملاحظة1:

إذا كان C منحنياً في $\mathbb{R}^3$ وكانت $M \equiv (x,y,z) \in C$. عندئذٍ، بأخذ متجه موضع النقطة $M \equiv (x,y,z) \in C$:

$$\vec{r} = x\,\vec{i} + y\,\vec{j} + z\,\vec{k}$$

فيكون المتجه:

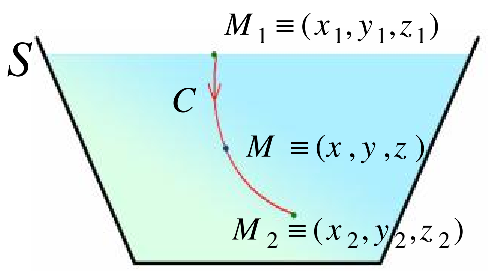
$$d\,\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$$

هو متجه المماس للمنحني C في النقطة M منه.

مبرهنة قانون باسكال الثاني:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً ويملك سطحاً حراً S.

إذا كانت $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1) \in S$ نقطة مادية اختيارية (ويمكن أخذها من داخل المائع). وكانت $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ نقطة مادية من المائع المتوازن مختلفة عن M_1 (لو أخذنا النقطتين منطبقتين ليس خطأ ولكنه حالة خاصة ولن يكون لكلامنا معنى). عندئذٍ لو طبقنا في M_1 قوة ضغط إضافية شدتها P'، فإن الضغط في M_2 سيزداد بالمقدار P'.



البرهان:

نفرض أن المائع متوازن تحت تأثير القوة الحجمية $\vec{F}(M)$ والمؤثرة في كل نقطة $M \equiv (x,y,z)$ من هذا المائع. بحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الموائع بلغة القوة الحجمية، يكون الشرط التالي محقق:

$$\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \quad ; \quad \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع المتوازن} \qquad \text{........} \quad (1)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع المتوازن} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \;\; ; \;\; \left|\vec{n}\right|=1$$

ولنفرض الآن أن شدة الضغط عند M_1 هي $P(M_1)=P_1$، وشدة الضغط عند M_2 هـي $P(M_2)=P_2$.

لنضع $\vec{r}=x\,\vec{i}+y\,\vec{j}+z\,\vec{k}$ متجه موضع النقطة $M\equiv(x,y,z)$ من المائع المتوازن، ولنأخذ: $d\,\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$. عندئذٍ بضرب طرفي (1) سلمياً بـ $d\,\vec{r}$ نجد:

$$\vec{F}(M).d\,\vec{r}=\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right).d\,\vec{r}$$
$$=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,dx+\frac{\partial P}{\partial y}(M)\,dy+\frac{\partial P}{\partial z}(M)\,dz=d\,P(M) \qquad \text{........} \quad (2)$$

$$\forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع المتوازن}$$

ليكن C منحنياً ما يقع داخل المائع ويصل M_1 بـ M_2، ولنوجه C من M_1 إلى M_2، ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in C$.

العلاقة (2) محققة في جميع نقاط المائع، وبشكل خاص تكون محققة على المنحني C، حيث يكون:

$$\vec{F}(M).d\,\vec{r}=d\,P(M) \quad ; \quad \forall M \equiv (x,y,z) \in C \qquad \text{........} \quad (3)$$

ولنكامل طرفي العلاقة (3) على المنحني C من M_1 إلى M_2، فنجد:

$$\int_{M_1}^{M_2} \vec{F}(M).d\,\vec{r}=\left[P(M)\right]_{M_1}^{M_2}=P(M_2)-P(M_1)=P_2-P_1$$

ومنه نجد:

$$P_2=P_1+\int_{M_1}^{M_2} \vec{F}(M).d\,\vec{r} \qquad \text{..........} \quad (4)$$

لنطبق الآن في M_1 قوة ضغط إضافية شدتها P' بحيث يبقى المائع متوازناً. عندئذٍ تعطى قوة الضغط الإضافية على الشكل: $\overrightarrow{P'}=-P'.\vec{n}$، وبالتالي يصبح الضغط الجديد الكلي فـي

M_1 هو: $\overrightarrow{P_n}(M_1)=-(P+P').\vec{n}$. وبالتالي شدة الضغط في وضع التوازن الجديد في النقطة M_1 تعطى: $P(M_1)=P_1+P'$.

ومنذ قليل أثبتنا أنه إذا كان المائع متوازناً فإنه يجب أن يتحقق:

$$P(M_2)=P(M_1)+\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}(M).d\vec{r} \qquad .... \quad (5)$$

ومن جهة أخرى إذا أضفنا لطرفي العلاقة (4) المقدار P' نحصل على:

$$P_2+P'=P_1+P'+\int_{M_1}^{M_2}\vec{F}(M).d\vec{r} \qquad .... \quad (6)$$

الآن بطرح (5) من (6) نحصل على:

$$P(M_2)=P_2+P'$$

وبالتالي فإن الضغط في M_2 يزداد في وضع التوازن الجديد بمقدار P'، وبما أن M_2 نقطة اختيارية من المائع تختلف عن M_1 فإن الضغط في جميع نقاط المائع يزداد بمقدار P'.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 2 11 2010 .

- جامعـــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الرابعة عشر

نتيجة1:(الشرط التابعي، اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية):

ليكن لدينا مائعاً يخضع لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ وكثافته الحجمية في كل نقطة مادية $M \equiv (x,y,z)$ منه هي $\rho(M)$. عندئذٍ يتوازن هذا المائع إذا وفقط إذا حقق الشرط التابعي التالي:

$$\rho\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

وحيث:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \qquad \wedge \qquad \forall \vec{n} \quad ; \quad |\vec{n}| = 1 \end{cases}$$

نتيجة2: (الشرط التابعي، اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة القوة الحجمية):

إن الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة القوة الحجمية هو تحقق الشرط التابعي التالي:

$$\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,P$$

حيث:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \qquad \wedge \qquad \forall \vec{n} \quad ; \quad |\vec{n}| = 1 \end{cases}$$

الشرط اللازم الذي تحققه قوة الكتلة في حالة التوازن:

لننتبه أولاً أنه ليست كل قوة كتلة $\vec{F}$ تجعل المائع متوازناً. وهدفنا الآن إيجاد الشرط اللازم الذي يجب أن تحققه قوة الكتلة في حالة التوازن.

لنفرض أن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ المؤثرة في كل نقطة مادية $M \equiv (x,y,z)$ من المائع، ولنرمز بـ $\rho(M)$ للكثافة الحجمية لهذا المائع في كل نقطة مادية $M \equiv (x,y,z)$ من المائع.

بما أن المائع متوازن فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي (بشكلها التابعي) لتوازن المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية، يكون الشرط التالي محققاً:

$$\rho\vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\,P \qquad .... \quad (1)$$

حيث:

$$\begin{cases} \overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \qquad \wedge \qquad \forall \vec{n} \quad ; \quad |\vec{n}| = 1 \end{cases}$$

عندئذٍ بأخذ دوران طرفي العلاقة (1) نجد:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\rho\vec{F}\right) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,P\right) \qquad \text{...........} \quad (2)$$

ولكن:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,P\right) = \vec{0} \qquad \text{.........} \quad (3)$$

وبحسب تمرين سابق، لدينا:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\left(\rho\vec{F}\right) = \rho.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\right) \wedge \vec{F} \qquad \text{..........} \quad (4)$$

الآن، بتعويض (3) , (4) في (2) نجد:

$$\rho.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} + \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\right) \wedge \vec{F} = \vec{0} \;\Rightarrow$$

$$\rho.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = -\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\right) \wedge \vec{F} = \vec{F} \wedge \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\right) \;\Rightarrow$$

$$\rho.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = \vec{F} \wedge \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\right) \qquad \text{..................} \quad (5)$$

لنضرب طرفي (5) ، داخلياً بالدالة $\vec{F}$ فنجد:

$$\rho.\left(\vec{F}\,.\,\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}\right) = \left[\vec{F} \wedge \left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\right)\right].\vec{F} = \left[\vec{F}\,,\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho\,,\vec{F}\right] = 0$$

بتقسيم الطرفين على ρ نجد:

$$\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F} = 0$$

وهو الشرط اللازم الذي تحققه قوة الكتلة في الحالة التي يكون فيها المائع متوازناً.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 4 11 2010 .

- جامعـــــة البعــــــــــث.
- كليـــــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الخامسة عشر

لنطرح السؤال التالي:

هل عكس النتيجة السابقة صحيح ؟. أي، هل تحقق الشرط: $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}=0$ يؤدي إلى توازن المائع ؟.

فيما يلي، سنجيب على هذا السؤال.

توجد موائع يتحقق لأجلها الشرط $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}=0$ دون أن تكون هذه الموائع متوازنة. إذاً الشرط $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}=0$ هو شرط لازم وغير كافٍ لتوازن الموائع.

ملاحظة1:

إذا كان لدينا مائعاً ما يخضع لتأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ المؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من هذا المائع، وكان السؤال: هل يمكن للمائع أن يتوازن تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}$؟، ماذا نفعل ؟!

نحسب $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$، فإذا كان $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}=0$ نقول عندئذٍ: يمكن للمائع أن يكون متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}$. إما إذا كان $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}\neq 0$ في لحظة ما، فإن المائع غير متوازن في هذه اللحظة.

تمرين1:

ليكن لدينا مائع يخضع لتأثير قوة الكتلة $\vec{F}$، المعرفة بالشكل:

$$\vec{F}(M)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}-xy\,\vec{k}$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع. والمطلوب: هل يمكن لهذا المائع أن يتوازن تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}$ ؟

<u>الحل:</u>

لنحسب $\vec{F}.\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$، ومن أجل ذلك نحسب أولاً $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}$:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ yz & xz & -xy\end{vmatrix}=$$

$$=\left(-\frac{\partial}{\partial y}xy-\frac{\partial}{\partial z}xz\right)\vec{i}+\left(\frac{\partial}{\partial z}yz+\frac{\partial}{\partial x}xy\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial}{\partial x}xz-\frac{\partial}{\partial y}yz\right)\vec{k}$$

$$=(-x-x)\vec{i}+(y+y)\vec{j}+(z-z)\vec{k}=-2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}$$

$$\Rightarrow$$

$\vec{F}(M).\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M)=-2xyz+2xyz=0 \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع

وبالتالي يمكن للمائع أن يكون متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$.

ملاحظة2:

إذا كان المائع ضغوط (يتغير حجمه بتغير ضغطه)، أي إذا كان المائع غازاً فإن: $\rho=\rho(M)$، (أي أن الكثافة تتبع لـ M). أما إذا كان المائع غير ضغوط (لا يتغير حجمه بتغير ضغطه)، أي إذا كان المائع سائلاً ومن نفس النوع، عندئذٍ تكون كثافته الحجمية ثابتة في كل نقطة من نقاطه، أي: $\rho=const>0$.

ملاحظة3:

كل سائل مأخوذ من الآن فصاعداً يكون من نوع واحد.

والسؤال الذي يطرح نفسه الآن:

في حالة السوائل، ما هو الشكل الجديد للمبرهنة السابقة الذي يصبح فيه الشرط هو شرط لازم وكافي ؟. وللإجابة على هذا السؤال نأخذ المبرهنة التالية:

مبرهنة1:

ليكن لدينا سائل ما كثافته الحجمية ρ، ويخضع لتأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$، المؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع، عندئذٍ يكون:

الشرط اللازم والكافي ليكون السائل متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ هو:

$\vec{F}$ دالة كمونية مشتقة من تابع الكمون: $V=-\dfrac{P}{\rho}$.

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع $\quad \wedge \quad \forall\vec{n} \; ; \; |\vec{n}|=1$

البرهان: لزوم الشرط:

لفرض أن السائل متوازن تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}$، ولنثبت تحقق الشرط المعطى:
بما أن السائل متوازن تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}$، فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية (الشكل التابعي) يكون:

$$\rho\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \;\; ; \;\; |\vec{n}| = 1$$

إن (1) تكتب بالشكل:

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\left(-\frac{P}{\rho}\right)$$

فإذا وضعنا: $V = -\dfrac{P}{\rho}$.

نكون قد أثبتنا أن:

$\vec{F}$ دالة كمونية مشتقة من تابع الكمون: $V = -\dfrac{P}{\rho}$.

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \;\; ; \;\; |\vec{n}| = 1$$

وهو المطلوب.

البرهان: كفاية الشرط:

لنفرض أن: $\vec{F}$ دالة كمونية مشتقة من تابع الكمون: $V = -\dfrac{P}{\rho}$.

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \;\; ; \;\; |\vec{n}| = 1$$

ولنثبت أن السائل متوازن تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}$. أي لنثبت تحقق الشرط $\rho\vec{F} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, P$.

بما أن $\vec{F}$ دالة كمونية مشتقة من تابع الكمون: $V=-\frac{P}{\rho}$، حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \;\; ; \;\; |\vec{n}|=1$$

فإن:

$$\vec{F}=-\overrightarrow{\text{grad}}V \;\Rightarrow\; \vec{F}=-\overrightarrow{\text{grad}}\left(-\frac{P}{\rho}\right) \Rightarrow \vec{F}=\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}P$$
$$\Rightarrow \;\rho\vec{F}=\overrightarrow{\text{grad}}P$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \;\; ; \;\; |\vec{n}|=1$$

والذي يعني أن السائل متوازن.

تعريف 1: (سطح سوية تابع).

لتكن $D\subseteq\mathbb{R}^3$ و $f:D\to\mathbb{R}$ تابع حقيقي معرف على D. ولتكن C نقطة من المستقر الفعلي لـ f. ندعو مجموعة النقاط $M\equiv(x,y,z)$ من D، والتي تحقق الشرط $f(M)=C$، بسطح سوية التابع f بالثابت C. ونقول أن معادلة هذا السطح هي: $f(M)=C$. وكلما أخذنا C جديدة من المستقر الفعلي للتابع f، نحصل على سطح سوية جديد لهذا التابع. وبالتالي نحصل على حزمة سطوح ، ندعوها بحزمة سطوح سوية التابع f. ونقول أن معادلة هذه الحزمة هي: $f(M)=C$.

مثال 1:

ليكن لدينا التابع: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$، والمعرف بالشكل:

$$f(M)=2x+3y+5z \;\; ; \;\; \forall M\equiv(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

والمطلوب إيجاد حزمة سطوح سوية هذا التابع.

<u>الحل:</u>

لتكن $C\in\mathbb{R}$، عندئذٍ فإن معادلة حزمة سطوح سوية التابع f هي:

$$f(M)=C \;;\; C\in\mathbb{R} \Rightarrow$$

$$2x+3y+5z=C$$

وحزمة سطوح سوية التابع f هنا، هي مستويات متوازية وناظمها: $\vec{n}=(2,3,5)$.

مثال2:

ليكن لدينا التابع: $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ والمعرف بالشكل:

$$f(M)=(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2 \;;\; \forall M\equiv(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$$

والمطلوب إيجاد حزمة سطوح سوية هذا التابع.

الحل:

لتكن $C\geq 0$ (دائماً نأخذ C من المستقر الفعلي). عندئذٍ معادلة الحزمة هي:

$$f(M)=C \;;\; C\in\mathbb{R}^+ \Rightarrow$$

$$(x-1)^2+(y-2)^2+(z-3)^2=C$$

وهنا نميز حالتين. *الحالة الأولى:* $C>0$، والحزمة هنا هي كرات متحدة المركز، ومركزها المشترك هو النقطة $(1,2,3)$، وأنصاف أقطارها $\sqrt{C}$ بشرط $C>0$.

الحالة الثانية: $C=0$ ، عندئذٍ فإن سطح سوية التابع، الموافق لـ $C=0$ ، هو فقط النقطة $(1,2,3)$، وهي الحالة التي سنستبعدها، نظراً لتفاهتها.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 7 11 2010 .

- جامعـــةالبعـــــــث.
- كليـــةالعلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنةالرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة السادسة عشر

مسائل توازن الموائع.

أولاً: مسائل توازن السوائل:

هناك نوعان لمسائل توازن السوائل:

النوع الأول: (الكثافة الحجمية معطاة، ودالة الضغط معطاة، ويطلب حساب قوة الكتلة).

ليكن لدينا سائلاً متوازناً كثافته الحجمية ρ (معطاة)، ولتكن دالة الضغط P معلومة لـــدينا، عندئذٍ لنوجد قوة الكتلة $\vec{F}$.

بما أن السائل متوازن فإن الشرط التالي يكون محقق:

$$\rho\vec{F}=\overrightarrow{\text{grad}}P \qquad .... \ (1)$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \ \ ; \ \ P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \ \ ; \ \ |\vec{n}|=1$$

عندئذٍ يكون:

$$\vec{F}=\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}P$$

النوع الثاني: (الكثافة الحجمية معطاة، وقوة الكتلة معطاة، ويطلب حـــساب دالـــة الـــضغط الموافقة للشرط الحدي المعطى).

ليكن لدينا سائلاً متوازناً كثافته الحجمية ρ (معطاة)، وهذا السائل يخضع لتأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}.$$

والتي تؤثر في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من السائل المتوازن. عندئذٍ لنحسب دالـــة الضغط P التي تحقق شرطاً حدياً معطى.

بما أن السائل متوازن فإن الشرط التالي محقق:

$$\rho\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}P(M) \ \ ; \ \ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المتوازن} \qquad .... \ (2)$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M \equiv (x, y, z) \in \text{للسائل المتوازن} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \; ; \; |\vec{n}| = 1$$

بإسقاط طرفي العلاقة (2) على المحاور الإحداثية $\overrightarrow{Ox}, \overrightarrow{Oy}, \overrightarrow{Oz}$ على الترتيب (بدءاً بـ $\overrightarrow{Ox}$) نجد:

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial P}{\partial x}(M) &= \rho.X(M) \\ \frac{\partial P}{\partial y}(M) &= \rho Y(M) \\ \frac{\partial P}{\partial z}(M) &= \rho.Z(M) \end{aligned}\right\} \forall M \equiv (x, y, z) \in \text{للسائل المتوازن} \qquad .... \; (3)$$

إن (3) تمثل جملة ثلاث معادلات تفاضلية جزئية من المرتبة الأولى، خطية ولكن غير متجانسة، بالتابع المجهول P والمتحولات المستقلة x, y, z. بحل هذه الجملة ضمن الشرط الحدي المعطى نحصل على دالة الضغط المطلوبة P.

مثال1: (على النوع الأول).

ليكن لدينا سائلاً متوازناً كثافته الحجمية ρ (معطاة)، ولنفرض أن دالة الضغط في كل نقطة مادية $M \equiv (x, y, z)$ من السائل المتوازن تعطى بالعلاقة:

$$P(M) = (x-1)^2 + (y-2)^2 + (z+7)^2.$$

والمطلوب: إيجاد قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ المؤثرة في هذا السائل المتوازن.

الحل:

بما أن السائل متوازن فإن الشرط التالي محقق:

$$\rho \vec{F} = \overrightarrow{\text{grad}}\, P \qquad .... \; (1)$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M \equiv (x, y, z) \in \text{للسائل المتوازن} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \; ; \; |\vec{n}| = 1$$

من (1) نجد:

$$\vec{F}(M)=\frac{1}{\rho}\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)=\frac{1}{\rho}\left[\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,\vec{i}+\frac{\partial P}{\partial y}(M)\,\vec{j}+\frac{\partial P}{\partial z}(M)\,\vec{k}\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\vec{F}(M)=\frac{2}{\rho}\left[(x-1)\vec{i}+(y-2)\vec{j}+(z+7)\vec{k}\right]$$

مثال2: (على النوع الثاني).

ليكن لدينا سائلاً متوازناً كثافته الحجمية ρ (معطاة)، ويخضع لتأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+2z\,\vec{k}.$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من السائل المتوازن. وليكن الشرط الحدي:

$$P(M)\Big|_{x^2+y^2+z^2=1}=1$$

والمطلوب: إيجاد دالة الضغط $P(M)$.

الحل:

بما أن السائل متوازن، فإن الشرط التالي يكون محقق:

$$\rho\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\quad;\quad\forall M\equiv(x,y,z)\in\ \text{للسائل المتوازن}$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in\ \text{للسائل المتوازن}\quad\wedge\quad\forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$$

بالإسقاط على المحاور الإحداثية $\overrightarrow{Ox},\overrightarrow{Oy},\overrightarrow{Oz}$ على الترتيب (بدءاً بـ $\overrightarrow{Ox}$) نجد:

$$\frac{\partial P}{\partial x}(M)=\rho.X(M)=2\rho x\qquad\text{..........}\ (1)$$

$$\frac{\partial P}{\partial y}(M)=\rho Y(M)=2\rho y\qquad\text{..........}\ (2)$$

$$\frac{\partial P}{\partial z}(M)=\rho.Z(M)=2\rho z \qquad .... \ (3)$$

بما أن القوة $\vec{F}$ كمونية، نضرب طرفي (1) بـــ dx، وطرفي (2) بـــ dy، وطرفي (3) بـــ dz، ثم نجمع النواتج فنجد:

$$d\,P(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,dx+\frac{\partial P}{\partial y}(M)\,dy+\frac{\partial P}{\partial z}(M)\,dz=$$

$$=2\rho[x\,dx+y\,dy+z\,dz]=d\left[\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)\right] \quad ;$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المتوازن}$$

ومنه نجد:

$$dP(M)=d\left[\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)\right]\Rightarrow$$

$$P(M)=\rho\left(x^2+y^2+z^2\right)+C\ ;\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المتوازن} \qquad .... \ (4)$$

وبالاستفادة من الشرط الحدي ، نجد:

$$1=1\rho+C \ \Rightarrow\ C=1-\rho$$

بالتعويض في (4) ، نجد:

$$P(M)=\rho\left(x^2+y^2+z^2-1\right)+1$$

قبل الدخول في مسائل توازن الغازات تلزمنا بعض التعاريف والمفاهيم الأساسية التاليـــة ذات المنشأ الفيزيائي.

تعريف1: (دالة الحرارة المئوية في مائع).

ليكن لدينا مائعاً ما (ساكن أو جارٍ). في اللحظة $t>0$ نفرض أن درجة الحرارة المئوية فـــي كل نقطة مادية M من نقاط المائع هي $\tau(M)$. وبهذا الشكل تتولد لدينا الدالة:

$$\tau:\ (\text{مجموعة نقاط المائع في اللحظة } t>0)\longrightarrow\mathbb{R}\ ;\ M\mapsto\tau(M)$$

عندئذٍ ندعو هذه الدالة بدالة درجة الحرارة المئوية للمائع في اللحظة $t>0$.

تعريف2: (دالة الحرارة المطلقة في مائع).

ليكن لدينا مائعاً ما (ساكن أو جارٍ). في اللحظة $t>0$ نفرض أن درجة الحرارة المئوية في كل نقطة مادية M من نقاط المائع هي $\tau(M)$. ولنأخذ المقدار $\mathrm{T}(M)=\tau(M)+273$.
عندئذٍ نسمي الدالة:

$$\mathrm{T}:(\text{مجموعة نقاط المائع في اللحظة } t>0) \longrightarrow \mathbb{R}^{+} \;;$$

$$M \mapsto \mathrm{T}(M)=\tau(M)+273.$$

بدالة أو تابع الحرارة المطلقة في اللحظة $t>0$.

قانون بويل في الغازات المثالية:

1) حالة درجة الحرارة المطلقة ثابتة:

ليكن لدينا غازاً مثالياً، ولنفرض أن دالة الحرارة المطلقة له في كل لحظة $t>0$ هي دالة ثابتة. عندئذٍ وفقاً لقانون بويل: توجد دالة موجبة φ بحيث يكون:

$$\rho(M)=\varphi\left[P(M)\right] \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{ الغاز المثالي}$$

2) حالة درجة الحرارة المطلقة في الحالة العامة:

ليكن لدينا غازاً مثالياً، ولنفرض أن دالة الحرارة المطلقة له في كل لحظة $t>0$ هي في شكلها العام $\mathrm{T}(M)$. عندئذٍ وفقاً لقانون بويل: توجد دالة موجبة ψ بحيث يكون:

$$\rho(M)=\psi\left[P(M),\mathrm{T}(M)\right] \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{ الغاز المثالي}$$

ملاحظة:

يبقى قانون بويل صحيحاً من أجل الغازات المتوازنة.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 9 11 2010 .

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــة العلـــــــــوم .
- قســـــم الرياضيــــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة السابعة عشر

ثانياً: مسائل توازن الغازات.

النوع الأول من مسائل توازن الغازات لن نتطرق له نظراً لقلة أهميته.

النوع الثاني من مسائل توازن الغازات:

ليكن لدينا غازاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة المعطاة لدينا:

$$\vec{F}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}.$$

ولنفرض أن دالة الحرارة المطلقة لهذا الغاز ثابتة في لحظات التوازن. وفقاً لقانون بويل توجد دالة موجبة φ (نفرض أنها معلومة) ، بحيث يكون:

$$\rho(M)=\varphi[P(M)] \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن}$$

ولنضف إلى ذلك شرطاً حدياً على دالة الضغط P.
وعندئذٍ يطلب منا تعيين الدالتين P و ρ.

لحل هذه المسألة نقول: بما أن الغاز متوازن فبحسب بمبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الموائع (كحالة خاصة لدينا توازن الغازات) ، بشكلها النقطي يكون:

$$\rho(M).\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن} \qquad .... \ (1)$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \; ; \; |\vec{n}|=1$$

من (1) نجد:

$$\vec{F}(M)=\frac{1}{\rho(M)}\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)$$
$$=\frac{1}{\varphi[P(M)]}\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن}$$

بالإسقاط نجد:

$$\left.\begin{aligned} X(M) &= \frac{1}{\varphi[P(M)]}\cdot\frac{\partial P}{\partial x}(M) \\ Y(M) &= \frac{1}{\varphi[P(M)]}\cdot\frac{\partial P}{\partial y}(M) \\ Z(M) &= \frac{1}{\varphi[P(M)]}\cdot\frac{\partial P}{\partial z}(M) \end{aligned}\right\} \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للغاز المتوازن} \quad \ldots\ldots \ (2)$$

إن (2) هي جملة ثلاث معادلات تفاضلية جزئية غير خطية وغير متجانسة من المرتبة الأولى بالتابع المجهول $P(M)$، والمتحولات المستقلة x, y, z.

بحل هذه الجملة ضمن الشرط الحدي المعطى نحصل على الدالة P. وبالتعويض في العلاقة $\rho(M) = \varphi[P(M)]$ نحصل على الدالة $\rho(M)$.

ملاحظة:

لن نتطرق إلى الحالة التي تكون فيها دالة الحرارة المطلقة للغاز المتوازن غير ثابتة وذلك تلافياً لتعقيدات المسألة.

تمرين: (على النوع الثاني من أنواع مسائل توازن الغازات).

ليكن لدينا غازاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M) = (x-1)\vec{i} + (y+2)\vec{j} + (z+5)\vec{k} \ ; \ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للغاز المتوازن}$$

ولنفرض أن دالة الحرارة المطلقة لهذا الغاز هي دالة ثابتة على نحو يكون فيه:

$$\rho(M) = 2P(M) \ ; \ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للغاز المتوازن}$$

ولنفرض أن: $P(M)\big|_{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=1} = e$.

والمطلوب حساب $\rho(M), P(M)$.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 11 11 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــة العلـــــــوم .
- قســـم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثامنة عشر

خطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$، في مائع متوازن:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ والمؤثرة في كل نقطة مادية M من هذا المائع المتوازن. ندعو حزمة المنحنيات C التي يمسها $\vec{F}(M)$ في كل نقطة مادية M منها، بخطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ في المائع المتوازن.

المعادلتان التفاضليتان الديكارتيتان لخطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}.$$

المؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع المتوازن. وليكن C_1 خط حقل اختياري من حزمة خطوط الحقل C لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$. ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in C_1$ نقطة مادية اختيارية من C_1، عندئذٍ يكون:

$$d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}.$$

ممثلاً لمتجه المماس لـ C_1 في النقطة M، وبحسب التعريف فإن $\vec{F}(M)$ أيضاً يمثل المماس لـ C_1 في النقطة M منه، وبالتالي أصبح لدينا:

$$d\vec{r}\,//\,\vec{F}(M)\quad;\quad\forall M\equiv(x,y,z)\in C \text{ للحزمة}$$

وبتطبيق شرط التوازي نجد:

$$\frac{dx}{X(M)}=\frac{dy}{Y(M)}=\frac{dz}{Z(M)}\quad;\quad\forall M\equiv(x,y,z)\in C \text{ للحزمة} \quad ......\ (1)$$

ندعو (1) بالمعادلتين التفاضليتين الديكارتيتين لخطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ في المائع المتوازن.

مثال:

مائع متوازن تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}-xy\,\vec{k}$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع المتوازن. والمطلوب إيجاد خطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ في هذا المائع المتوازن.

الحل:

المعادلتان التفاضليتان الديكارتيتان لخطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ هما:

$$\frac{dx}{X(M)}=\frac{dy}{Y(M)}=\frac{dz}{Z(M)} \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in C \text{ للحزمة}$$

وبالتعويض نجد:

$$\frac{dx}{yz}\underbrace{=}_{(1)}\frac{dy}{xz}\underbrace{=}_{(2)}-\frac{dz}{xy}$$

من المساواة (1)، نجد:

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{x}\Rightarrow x\,dx-y\,dy=0\Rightarrow x^2-y^2=c_1$$

حيث: c_1 ثابت حقيقي اختياري.

ومن المساواة (2) نجد:

$$\frac{dy}{z}=-\frac{dz}{y}\Rightarrow y\,dy+z\,dz=0\Rightarrow y^2+z^2=c_2$$

حيث: c_2 ثابت حقيقي اختياري، غير سالب.

وبالتالي حزمة خطوط الحقل لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ هي:

$$\left.\begin{array}{l} x^2-y^2=c_1 \\ y^2+z^2=c_2 \end{array}\right\}$$

ملاحظة: (من الهندسة التحليلية).

لتكن: $D\subseteq\mathbb{R}^3$. وليكن: $f:D\to\mathbb{R}\ ;\ M\equiv(x,y,z)\mapsto f(M)$ تابع حقيقي. ولتكن c من المستقر الفعلي لـ f. فإذا كان S هو سطح سوية الكمون للتابع f بالثابت c، فتكون معادلة هذا السطح S هي: $f(M)=c$. وإذا كانت $M\equiv(x,y,z)\in S$ ، فإنه

من جهة أولى لدينا: $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ يمثل المماس في النقطة M للسطح S، كما أنه من جهة ثانية لدينا $\overrightarrow{\text{grad}}f\,(M)$ يمثل الناظم في النقطة M للسطح S.

حزمة سطوح سوية الضغط لمائع متوازن:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من هذا المائع المتوازن. بما أن المائع متوازن فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن المائع يكون:

$$\rho(M).\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}P(M)\quad;\quad\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\quad;\quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}\quad\wedge\quad\forall\vec{n}\;;\;|\vec{n}|=1$$

تعريف1:

ليكن: $c\geq 0$. عندئذٍ ندعو المحل الهندسي لمجموعة نقاط المائع المتوازن والتي تكون من الشكل $M\equiv(x,y,z)$، والمحققة للشرط: $P(M)=c$، بسطح سوية الضغط للمائع المتوازن بالثابت c. ونقول أن معادلة هذا السطح هي: $P(M)=c$.

كلما غيرنا $c\geq 0$، نحصل على سطح سوية ضغط جديد، وبالتالي نحصل على حزمة سطوح تدعى بحزمة بسطوح سوية الضغط للمائع المتوازن، ونقول أن معادلة هذه الحزمة هي:

$$P(M)=c\;\;;\;\;c\geq 0.$$

مبرهنة1:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ المؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من هذا المائع المتوازن. عندئذٍ $\vec{F}(M)$ يمثل الناظم في M لحزمة سطوح سوية الضغط لهذا المائع المتوازن في كل نقطة مادية M من هذه الحزمة.

البرهان:

بما أن المائع متوازن فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الموائع، يكون الشرط التالي محققاً:

$$\rho(M).\vec{F}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \quad ; \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}$$

حيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \; ; \; |\vec{n}|=1$$

وينتج عن ذلك أن:

$$\Rightarrow \vec{F}(M)//\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \; ; \; \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المتوازن}$$

هذا من جهة أولى، ومن جهة ثانية ليكن S_1 سطح سوية ضغط اختياري لهذا المائع بالثابت c_1، فتكون معادلة هذا السطح هي: $P(M)=c_1$. عندئذٍ يكون:

$$\vec{F}(M)//\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \; ; \; \forall M\equiv(x,y,z)\in S_1$$

فإذا كانت $M\equiv(x,y,z)$ نقطة اختيارية من S_1 (الذي بدوره اختياري من حزمة سطوح سوية الضغط) ، فينتج أن $\vec{F}(M)$ ناظمي على S_1 في كل نقطة مادية M من S_1، وبالتالي $\vec{F}(M)$ ناظمي على حزمة سطوح سوية الضغط في كل نقطة M من هذه الحزمة.

المعادلة التفاضلية الديكارتية لحزمة سطوح سوية الضغط لمائع متوازن:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=X(M)\vec{i}+Y(M)\vec{j}+Z(M)\vec{k}.$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من هذا المائع المتوازن. وليكن S_1 سطح سوية ضغط اختياري لهذا المائع، ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in S_1$ نقطة مادية اختيارية.

بحسب المبرهنة السابقة يكون $\vec{F}(M)$ الناظم في M على السطح S_1 ، ومن جهة أخرى لدينا: $d\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ هو المماس في M لـ S_1. ينتج عن ذلك أن:

$$d\vec{r}\perp\vec{F}(M)$$

بتطبيق شرط التعامد، وكون S_1 اختياري نجد أن:

$$X(M)dx + Y(M)dy + Z(M)dz = 0 \;;$$

$\forall M \equiv (x, y, z) \in$ لحزمة سطوح سوية الضغط .... (*)

ندعو (*) بالمعادلة التفاضلية الديكارتية لحزمة سطوح سوية الضغط للمائع التوازن.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 21 11 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة التاسعة عشر

تمرين1:

ليكن لدينا مائعاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}-xy\,\vec{k}$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من المائع التوازن. فإذا علمت أن المائع المتوازن يقع في الثمن الأول للجملة $Oxyz$. والمطلوب: إيجاد حزمة سطوح سوية الضغط لهذا المائع المتوازن.

الحل:

نعلم أن المعادلة التفاضلية الديكارتية لحزمة سطوح سوية الضغط في المائع المتوازن هي:

$$X(M)dx+Y(M)dy+Z(M)dz=0\ ;$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ لحزمة سطوح سوية الضغط للمائع المتوازن

بالتعويض نجد:

$$yz\,dx+xz\,dy-xy\,dz=0$$

لحل هذه المعادلة نضرب بعامل التكميل: $\mu=\dfrac{1}{xyz}$. فنجد:

$$\frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}-\frac{dz}{z}=0\ \Rightarrow\ \frac{dx}{x}+\frac{dy}{y}=\frac{dz}{z}$$

$$\Rightarrow$$

$$\ln xy=\ln\frac{z}{\text{c}}\ \Rightarrow\ xy=\frac{z}{\text{c}}\ \Rightarrow\ z=\text{c}xy$$

حيث c ثابت موجب اختياري.

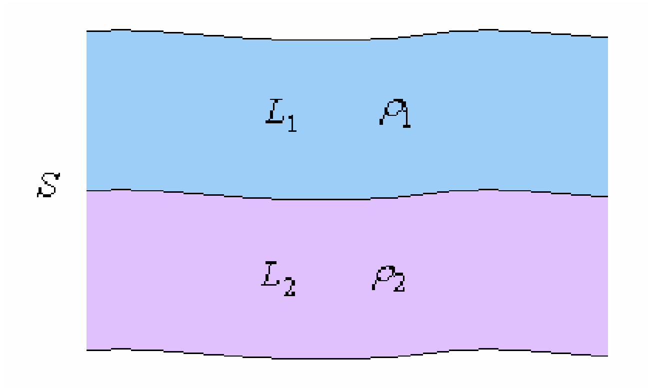
ومعادلة حزمة سطوح سوية الضغط هي: $z=\text{c}xy$.

ملاحظة:

لا يوجد شيء اسمه سطح سوية كمون لتابع حقيقي ثابت.

مبرهنة1:

إذا كان لدينا سائلان متوازنان ومختلفان وغير قابلين للخلط. فإن السطح الفاصل بينهما هو سطح سوية ضغط للمائع الكلي.



البرهان:

نفرض أن السائلان هما L_1 , L_2 بحيث أن L_1 يتوضع فوق L_2، ولنفرض أن الكثافة الحجمية للسائل L_1 هي ρ_1، والكثافة الحجمية للسائل L_2 هي ρ_2، من اختلاف السائلين ينتج لدينا أن:

$$\rho_1 \neq \rho_2 \;\Leftrightarrow\; \rho_1 - \rho_2 \neq 0$$

ولنرمز بـ S للسطح الفاصل بين السائلين L_1 , L_2.

بما أن L_1 , L_2 متوازنين فإن: $L := L_1 \cup L_2$ هو مائع متوازن، ولنفرض أن كثافته الحجمية هي $\rho(M)$، فيكون:

$$\rho(M) = \begin{cases} \rho_1 & ; \; M \in L_1 \\ \rho_2 & ; \; M \in L_2 \end{cases}$$

بما أن L مائع متوازن، فبتطبيق مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الموائع يكون الشرط التالي محققاً:

$$\rho(M).\vec{F}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M) \quad ; \quad \forall M \equiv (x, y, z) \in L \qquad .... \; (1)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M \equiv (x,y,z)\in L \qquad \wedge \qquad \forall \vec{n} \;\; ; \;\; \left|\vec{n}\right|=1$$

لنضرب الآن طرفي العلاقة (1) داخلياً بـــ: $d\,\vec{r}=dx\,\vec{i}+dy\,\vec{j}+dz\,\vec{k}$ فنجد:

$$\rho(M).\vec{F}(M).d\,\vec{r}=d\left[P(M)\right] \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in L$$

وبشكل خاص يتحقق لدينا:

$$\rho_1.\vec{F}(M).d\,\vec{r}=d\left[P(M)\right] \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in L_1$$

$$\rho_2.\vec{F}(M).d\,\vec{r}=d\left[P(M)\right] \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in L_2$$

وباعتبار S من L_1 $\Leftarrow$

$$\rho_1.\vec{F}(M).d\,\vec{r}=d\left[P(M)\right] \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S \qquad .... \; (2)$$

وباعتبار S من L_2 $\Leftarrow$

$$\rho_2.\vec{F}(M).d\,\vec{r}=d\left[P(M)\right] \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S \qquad .... \; (3)$$

حيث $d\,\vec{r}$ في (2) , (3) هو المماس للسطح S في M.

من (2) , (3) ينتج لدينا أن:

$$\rho_1.\vec{F}(M).d\,\vec{r}=\rho_2.\vec{F}(M).d\,\vec{r} \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S$$

$$\Rightarrow (\rho_1-\rho_2).\vec{F}(M).d\,\vec{r}=0 \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S$$

ولكن:

$$(\rho_1-\rho_2)\neq 0 \;\Rightarrow\; \vec{F}(M).d\,\vec{r}=0 \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S$$

نعوض في (2) أو في (3)، نجد:

$$d\left[P(M)\right]=0 \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S \;\Rightarrow$$

$$P(M)=\mathrm{c}=const \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x,y,z)\in S$$

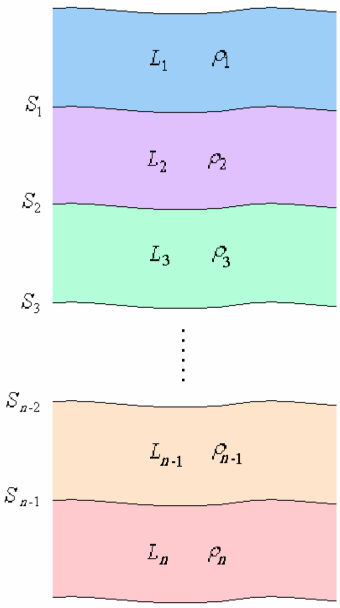
وبالتالي S هو سطح سوية ضغط لـــ L.

وهو المطلوب إثباته.

يمكن تعميم المبرهنة السابقة على n من السوائل كما يلي:

مبرهنة2: (تعميم):

إذا كان لدينا n من السوائل المتوازنة $\{L_1, L_2, \ldots, L_n\}$، والمتوضعة فوق بعضها البعض، والمختلفة مثنى مثنى، وغير قابلة للخلط. ولو فرضنا أن $\{S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}\}$ هي السطوح الفاصلة بينها (كما في الشكل التالي)، عندئذٍ يكون كل سطح من هذه السطوح هو سطح سوية ضغط للمائع الكلي: $L := L_1 \cup L_2 \cup \ldots \cup L_n$.



ملاحظة:

إذا كان لدينا مائعاً ما متوازناً ويملك سطحاً حراً، فتدل التجربة على أن هذا السطح الحر هو سطح سوية ضغط للمائع المتوازن.

تعريف1: (حزمة سطوح سوية الكثافة لغاز متوازن).

ليكن لدينا غازاً متوازناً كثافته الحجمية $\rho(M)$ في كل نقطة مادية $M \equiv (x, y, z)$ منه. وليكن $c > 0$. نسمي المحل الهندسي لمجموعة نقاط الغاز المتوازن والتي تحقق الشرط $\rho(M) = c$، بسطح سوية كثافة للغاز المتوازن بالثابت $c > 0$. ونقول عندئذٍ أن معادلة هذا السطح هي: $\rho(M) = c$.

وكلما تغيرت $c>0$، نحصل على سطح سوية كثافة جديد للغاز المتوازن، وبالنتيجة نحصل على حزمة سطوح سوية الكثافة للغاز المتوازن، ونقول أن معادلة هذه الحزمة هي:

$$\rho(M)=\mathrm{c} \ ; \ \mathrm{c}>0$$

ملاحظة:

من الواضح أنه لا يوجد مفهوم سطوح سوية الكثافة للسائل المتوازن، لأن السائل يملك نفس الكثافة في كل نقطة من نقاطه.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 23 11 2010.

- جامعـــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميـكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة العشرون

تمرين: (على النوع الثاني من أنواع مسائل توازن الغازات).

ليكن لدينا غازاً متوازناً تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=(x-1)\vec{i}+(y+2)\vec{j}+(z+5)\vec{k} \; ; \; \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن}$$

ولنفرض أن دالة الحرارة المطلقة لهذا الغاز هي دالة ثابتة على نحو يكون فيه:

$$\rho(M)=2P(M) \; ; \; \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن}$$

ولنفرض أن: $P(M)\big|_{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2=1}=e$.

والمطلوب حساب $\rho(M)\,,P(M)$.

الحل:

بما الغاز متوازن، فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الموائع يكون:

$$\vec{F}(M)=\frac{1}{\rho(M)}\overrightarrow{\text{grad}}P(M) \; ; \; \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن}$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n} \;\; ; \;\; P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n} \; ; \; |\vec{n}|=1$$

بالإسقاط نجد:

$$X(M)=\frac{1}{\rho(M)}\frac{\partial P}{\partial x}(M) \Rightarrow (x-1)=\frac{1}{2P(M)}\frac{\partial P}{\partial x}(M) \quad \ldots\ldots\ldots (1)$$

$$Y(M)=\frac{1}{\rho(M)}\frac{\partial P}{\partial y}(M) \Rightarrow (y+2)=\frac{1}{2P(M)}\frac{\partial P}{\partial y}(M) \quad \ldots\ldots\ldots (2)$$

$$Z(M)=\frac{1}{\rho(M)}\frac{\partial P}{\partial z}(M) \Rightarrow (z+5)=\frac{1}{2P(M)}\frac{\partial P}{\partial z}(M) \quad \ldots\ldots\ldots (3)$$

نضرب طرفي (1) بـ dx، وطرفي (2) بـ dy، وطرفي (3) بـ dz، ومن ثم نجمع النواتج طرفاً لطرف، فنحصل على:

$$(x-1)dx+(y+2)dy+(z+5)dz=\frac{1}{2P(M)}\left[d\,P(M)\right]$$

نضرب طرفي العلاقة الأخيرة بـــ 2 فنجد:

$$d\left[(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2\right]=\frac{1}{P(M)}\left[d\,P(M)\right]=d\left[\ln P(M)\right]$$

وبمكاملة طرفي المساواة الأخيرة نجد:

$$(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2+c_1=\ln P(M)$$

$$\Rightarrow$$

$$e^{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2+c_1}=P(M)\ \Rightarrow$$

$$P(M)=e^{c_1}.e^{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2}=c.e^{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2}$$

حيث: c ثابت حقيقي اختياري موجب.

وبالاستفادة من الشرط الحدي، نجد:

$$e=c.e\ \ \Rightarrow\ c=1$$

ومنه:

$$P(M)=e^{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2}$$

وبالتالي نجد:

$$\rho(M)=2P(M)=2e^{(x-1)^2+(y+2)^2+(z+5)^2}$$

ملاحظة هامة:

إذا كان لدينا مائعاً متوازناً وطلب منا إيجاد حزمة سطوح سوية الضغط لهذا المـــائع، فإننـــا نواجه الحالتين التاليتين:

❖ الحالة الأولى:

إذا كان المائع المتوازن هو سائل متوازن، فعندئذٍ نوجد الحزمة المطلوبة باتباع أحـــد الطريقين التاليين:

1) الطريق الأول:

نكامل معادلات التوازن فنحصل على $P(M)$ (مع ثابت) وعندئذٍ تكون معادلـــة الحزمة هي: $P(M)=c\geq 0$.

2) الطريق الثاني:

تعطى معادلة الحزمة مباشرة بالعلاقة:

$$X(M)dx+Y(M)dy+Z(M)dz=0 \quad .... \quad (*)$$

و العلاقة السابقة صحيحة من أجل السوائل المتوازنة و الغازات المتوازنة.

❖ الحالة الثانية:

إذا كان المائع المتوازن هو غاز متوازن، عندئذٍ نوجد الحزمة المطلوبة من المعادلة التفاضلية:

$$X(M)dx+Y(M)dy+Z(M)dz=0 \quad .... \quad (*)$$

تمرين2:

سائل متوازن كثافته الحجمية ρ، ويخضع لتأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=2x\,\vec{i}+2y\,\vec{j}+2z\,\vec{k}$$

و المؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من هذا السائل المتوازن. فإذا علمت أن السائل يملك سطحاً حراً، وأن حجم السائل هو V (معطى). و المطلوب:

1) أوجد حزمة سطوح سوية الضغط لهذا السائل المتوازن.
2) أوجد معادلة السطح الحر لهذا السائل.

الحل:

1) بما أن السائل متوازن فبحسب مبرهنة الشرط اللازم و الكافي لتوازن السوائل يكون:

$$\rho.\vec{F}(M)=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المتوازن}$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\ \ ;\ \ P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ \left|\vec{n}\right|=1$$

بالإسقاط نجد:

$$2\rho x = \frac{\partial P}{\partial x}(M) \quad .... \quad (1)$$

$$2\rho y = \frac{\partial P}{\partial y}(M) \quad .... \quad (2)$$

$$2\rho z = \frac{\partial P}{\partial z}(M) \quad .... \quad (3)$$

نضرب طرفي (1) بـ dx، وطرفي (2) بـ dy، وطرفي (3) بـ dz، ومن ثم نجمع النواتج طرفاً لطرف، فنحصل على:

$$2\rho.(x\,dx + y\,dy + z\,dz) = d\left[P(M)\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\rho.d\,(x^2 + y^2 + z^2) = d\left[P(M)\right]$$

$$\Rightarrow$$

$$\rho.(x^2 + y^2 + z^2) + \mathrm{c}_1 = P(M) \;\;;\;\; \mathrm{c}_1 \geq 0$$

لإيجاد حزمة سطوح سوية الضغط، نضع:

$$P(M) = \mathrm{c}_2 \;\;;\;\; \mathrm{c}_2 \geq 0$$

$$\Rightarrow$$

$$\rho(x^2 + y^2 + z^2) + \mathrm{c}_1 = \mathrm{c}_2 \;\Rightarrow\; \rho(x^2 + y^2 + z^2) = \mathrm{c}_2 - \mathrm{c}_1$$

$$\Rightarrow$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{\mathrm{c}_2 - \mathrm{c}_1}{\rho} = \mathrm{c}$$

ومنه معادلة الحزمة هي:

$$x^2 + y^2 + z^2 = \mathrm{c} \;\;;\;\; \mathrm{c} \geq 0$$

وحزمة سطوح سوية الضغط هي عبارة عن كرات متحدة المركز، ومركزها المشترك هو المبدأ $O \equiv (0,0,0)$، وأنصاف أقطارها هي $\sqrt{c}$.

2) بما أن السائل متوازن ويملك سطحاً حراً، فبحسب نتيجة سابقة يكون هذا السطح الحر هو سطح سوية ضغط للسائل المتوازن ، وبما أن سطوح سوية الضغط لهذا السائل المتوازن هي وفقط هي كرات متحدة المركز، ومركزها المشترك هو $O \equiv (0,0,0)$، وأنصاف أقطارها $\sqrt{c}$، فالسطح الحر بدوره هو كرة مركزها $O \equiv (0,0,0)$ ونصف قطرها $\sqrt{c}$، ومعادلته:

$$x^2+y^2+z^2=c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (1)$$

لنوجد الآن قيمة c:

بما أن حجم السائل المعطى في هذه المسألة هو V، وبما أن الحجم في حالة الكرة يـــساوي $\frac{4}{3}\pi c^{\frac{3}{2}}$، فإنه يكون:

$$V=\frac{4}{3}\pi c^{\frac{3}{2}} \Rightarrow c=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

بالتعويض في (1) نجد معادلة السطح الحر، وهي:

$$x^2+y^2+z^2=\left(\frac{3V}{4\pi}\right)^{\frac{2}{3}}$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 25 11 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــــة العلـــــــــوم .
- قســــم الرياضيـــــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الحادية والعشرون

ملاحظة1: (هامة).

إذا كان لدينا غازاً متوازناً، دالة حرارته المطلقة ثابتة، عندئذٍ تتطابق حزمة سطوح سوية الضغط لهذا الغاز المتوازن مع حزمة سطوح سوية الكثافة له.

البرهان:

وفقاً لقانون بويل، توجد دالة موجبة φ على نحو يكون فيه:

$$\rho(M)=\varphi[P(M)] \quad ; \quad \forall M \equiv (x,y,z)\in \text{للغاز المتوازن}$$

فإذا كان S سطح سوية ضغط اختياري لهذا الغاز المتوازن، وكانت معادلة S هي:

$$P(M)=c_1$$

حيث: $c_1=const\geq 0$.

وبالتالي:

$$\forall M \equiv (x,y,z)\in S \;\Rightarrow\; \rho(M)=\varphi(c_1)=c_2 \quad ; \quad c_2=const\geq 0.$$

وهذا يعني أن S هو أيضاً سطح سوية كثافة لهذا الغاز المتوازن. وبما أن S هو سطح سوية ضغط اختياري لهذا الغاز المتوازن، فإن كل سطح سوية ضغط للغاز المتوازن هو سطح سوية كثافة له.

نتيجة1: (هامة).

إذا كان لدينا غازاً متوازناً دالة حرارته المطلقة غير ثابتة، فليس من الضروري أن يكون كل سطح سوية ضغط للغاز المتوازن هو سطح سوية كثافة له.

نتيجة2: (هامة).

يمكن أن تتقاطع حزمة سطوح سوية الضغط لغاز متوازن مع حزمة سطوح سوية الكثافة لهذا الغاز المتوازن بمنحنيات، إذا كانت دالة الحرارة المطلقة له غير ثابتة.

خطوط سوية الضغط والكثافة لغاز متوازن دالة حرارته المطلقة غير ثابتة:

ليكن لدينا غازاً متوازناً دالة حرارته المطلقة غير ثابتة، وكثافته الحجمية هي $\rho(M)$ في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ من هذا الغاز المتوازن.

ليكن $c_1 = const \geq 0 \ , \ c_2 = const > 0$، عندئذٍ ندعو المنحني المعين بالتقاطع لــ:

$$\left.\begin{aligned} P(M) &= c_1 \\ \rho(M) &= c_2 \end{aligned}\right\}$$

بخط سوية ضغط وكثافة للغاز المتوازن الذي دالة حرارته المطلقة غير ثابتة.

ونقول أن معادلة هذا الخط هي:

$$\left.\begin{aligned} P(M) &= c_1 \quad ; \ c_1 = const \geq 0 \\ \rho(M) &= c_2 \quad ; \ c_2 = const > 0 \end{aligned}\right\}$$

ومن أجل كل قيمتين $c_1 \geq 0 \ , \ c_2 > 0$، نحصل على خط سوية ضغط وكثافة جديد، وبالتالي نحصل على حزمة خطوط ندعوها بحزمة خطوط سوية الضغط والكثافة للغــاز المتــوازن، ونقول أن معادلة هذه الحزمة هي:

$$\begin{cases} P(M) = c_1 \quad ; \ c_1 \geq 0 \\ \rho(M) = c_2 \quad ; \ c_2 > 0 \end{cases}$$

قبل الدخول في الفقرة القادمة، يلزمنا التعريف الهام التالي:

تعريف1:

لتكن $D \subseteq \mathbb{R}^3$، ولتكن:

$$\vec{F} : D \to \mathbb{R}^3 \ ; \ M \mapsto \vec{F}(M)$$

$$\vec{G} : D \to \mathbb{R}^3 \ ; \ M \mapsto \vec{G}(M)$$

دالتان متجهيتان لهما نفس المنطلق ونفس المستقر. عندئذٍ نقول إن $\vec{F}$ يوازي $\vec{G}$، ونكتــب رمزاً لذلك: $\vec{F} // \vec{G}$، إذا وفقط إذا وجدت دالة حقيقية:

$$f : D \to \mathbb{R} \ ; \ M \mapsto f(M)$$

بحيث يكون:

$$\vec{F} = f.\vec{G} \Leftrightarrow \vec{F}(M) = f(M).\vec{G}(M) \quad ; \quad \forall M \in D.$$

نتيجة3: (هامة).

إذا كان لدينا غازاً متوازناً كثافته الحجمية $\rho(M)$، ويخضع لقوة الكتلة $\vec{F}(M)$، من أجل كل $M\equiv(x,y,z)$ من الغاز المتوازن. عندئذٍ يكون:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}\ //\ \left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho\wedge\vec{F}\right)$$

البرهان:

بما أن الغاز متوازن، فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الغازات، بالشكل التابعي لها، يكون:

$$\rho.\vec{F}=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P \qquad \ldots\ldots\ldots\ (1)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\ \ ;\ \ P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للغاز المتوازن $\quad\wedge\quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$

بأخذ دوران طرفي العلاقة (1) نجد:

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\rho.\vec{F}\right)=\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right) \qquad \ldots\ldots\ldots\ (2)$$

ولكن من جهة أولى لدينا: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P\right)=\vec{0}$.

ومن جهة ثانية لدينا: $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\left(\rho.\vec{F}\right)=\rho.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho\wedge\vec{F}$.

بالتعويض في (2) نجد:

$$\rho.\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}+\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho\wedge\vec{F}=0$$

$$\Rightarrow$$

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}=-\frac{1}{\rho}\left[\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho\wedge\vec{F}\right]$$

وهذا بدوره يعني أن:

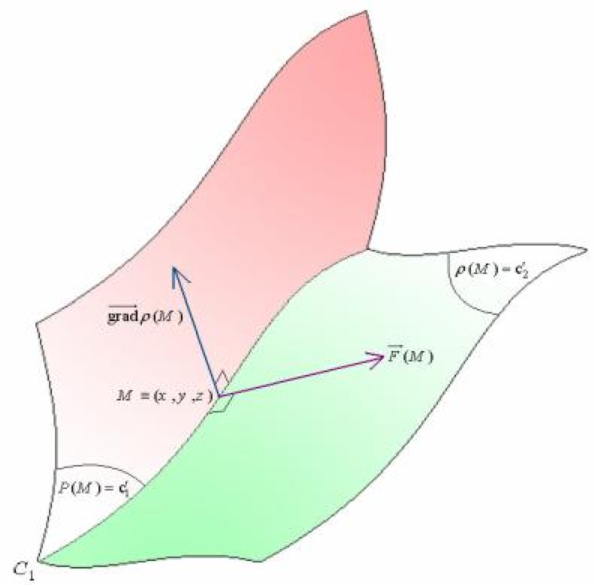
$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}\ //\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho\wedge\vec{F} \quad\Leftrightarrow\quad \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{F}(M)\ //\ \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\rho(M)\wedge\vec{F}(M)$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للغاز المتوازن

المعادلتان التفاضليتان الديكارتيان لخطوط سوية الضغط والكثافة لغاز متوازن دالة حرارتـه المطلقة غير ثابتة:

ليكن C_1 خط سوية ضغط وكثافة لهذا الغاز المتوازن. ولنفرض أن معادلتا C_1 هما:

$$\begin{cases} P(M) = c_1' \;\; ; \;\; c_1' = const \geq 0 \\ \rho(M) = c_2' \;\; ; \;\; c_2' = const > 0 \end{cases}$$



ولتكن $M \equiv (x, y, z) \in C_1$.

عندئذٍ: يكون $d\vec{r} = dx\,\vec{i} + dy\,\vec{j} + dz\,\vec{k}$ هو المماس في $M \equiv (x, y, z)$ لـ C_1.

وبما أن الغاز متوازن، فبحسب الفقرة السابقة يكون:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M) \,//\, \overrightarrow{\text{grad}}\,\rho(M) \wedge \vec{F}(M) \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x, y, z) \in \text{ للغاز المتوازن}$$

وبشكل خاص على C_1 يكون:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M) \,//\, \overrightarrow{\text{grad}}\,\rho(M) \wedge \vec{F}(M) \;\; ; \;\; \forall M \equiv (x, y, z) \in C_1 \quad \ldots\ldots\ldots (*)$$

هذا من جهة أولى.

ومن جهة ثانية: إذا كانت $M \in C_1$، فبحسب مبرهنة سابقة يكون $\vec{F}(M)$ هو النـــاظم فـــي M على C_1. وبالتالي فإن $\left(\overrightarrow{\text{grad}}\,\rho(M) \wedge \vec{F}(M)\right)$ هو المماس لـــ C_1 فـــي النقطـــة M منه.

مما سبق، ومن $(*)$، نجد أن $\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M)$ هو المماس في M لـــ C_1.

مما تقدم ينتج أن:

$$d\vec{r}\ //\ \overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in C_1 \quad ....\ (*')$$

ولكن:

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{F}(M)=\begin{vmatrix}\vec{i} & \vec{j} & \vec{k}\\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ X(M) & Y(M) & Z(M)\end{vmatrix}=\left(\frac{\partial Z}{\partial y}(M)-\frac{\partial Y}{\partial z}(M)\right)\vec{i}+$$

$$+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}(M)-\frac{\partial Y}{\partial z}(M)\right)\vec{j}+\left(\frac{\partial Z}{\partial y}(M)-\frac{\partial Y}{\partial z}(M)\right)\vec{k}$$

وبالتالي، بتطبيق شرط التوازي $(*')$، نجد:

$$\left.\begin{array}{l}\dfrac{dx}{\dfrac{\partial Z}{\partial y}(M)-\dfrac{\partial Y}{\partial z}(M)}=\dfrac{dy}{\dfrac{\partial X}{\partial z}(M)-\dfrac{\partial Z}{\partial x}(M)}=\dfrac{dz}{\dfrac{\partial Y}{\partial x}(M)-\dfrac{\partial X}{\partial y}(M)}\\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{لحزمة خطوط سوية الضغط و الكثافة}\end{array}\right\}(*'')$$

ندعو $(*'')$ بالمعادلتان التفاضليتان الديكارتيان لحزمة خطوط سوية الضغط و الكثافة للغاز المتوازن.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 28 11 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــــة العلـــــــــوم .
- قســــــم الرياضيـــــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثانية والعشرون

تمرين 1:

غاز متوازن تحت تأثير قوة الكتلة:

$$\vec{F}(M)=yz\,\vec{i}+xz\,\vec{j}-xy\,\vec{k}$$

والمؤثرة في كل نقطة مادية $M\equiv(x,y,z)$ منه. فإذا علمت أن دالة الحرارة المطلقة لهذا الغاز المتوازن غير ثابتة، وأن الغاز يقع في الثمن الأول طول فترة التــوازن. والمطلــوب: إيجاد خطوط سوية الضغط والكثافة لهذا الغاز المتوازن.

الحل:

نعلم أن المعادلتان التفاضليتان الديكارتيتان لخطوط سوية الضغط والكثافة لهذا الغاز المتوازن تعطيان بــ:

$$\frac{dx}{\dfrac{\partial Z}{\partial y}-\dfrac{\partial Y}{\partial z}}=\frac{dy}{\dfrac{\partial X}{\partial z}-\dfrac{\partial Z}{\partial x}}=\frac{dz}{\dfrac{\partial Y}{\partial x}-\dfrac{\partial x}{\partial y}}$$

وبالتعويض نجد:

$$\frac{dx}{-x-x}=\frac{dy}{y+y}=\frac{dz}{z-z}$$

$$\Rightarrow$$

$$\underbrace{-\frac{dx}{2x}}_{(1)}=\underbrace{\frac{dy}{2y}}_{(2)}=\underbrace{\frac{dz}{0}}_{(3)}$$

من النسبتين (1) و (2) نجد:

$$\frac{dy}{y}=-\frac{dx}{x}\;\Rightarrow\;\ln\frac{y}{c_1}=\ln\frac{1}{x}\;\Rightarrow\;\frac{y}{c_1}=\frac{1}{x}\;\Rightarrow\;xy=c_1.$$

حيث c_1 ثابت حقيقي اختياري، موجب.

من النسبتين (2) و (3) نجد:

$$2y\,dz=0\;\Rightarrow\;z=c_2\;\;;\;\;c_2>0.$$

وبالتالي فإن خطوط سوية الضغط والكثافة تعطى بـــ:

$$\begin{cases} xy = c_1 \\ z = c_2 \end{cases}$$

والمعادلة الأولى تمثل معادلة سطح اسطواني زائدي. في حين أن المعادلة الثانية تمثل معادلة مستوٍ أفقي، حيث أن $\overrightarrow{OZ}$ محور شاقولي.

وبالتالي ينتج لدينا أن خطوط سوية الضغط والكثافة هي قطوع زائدة موجودة في مـــستويات أفقية توازي المستوي Oxy.

الفصل الثالث

توازن الموائع الثقيلة (مبدأ الأواني المستطرقة)

تعريف1:

نقول عن مائع ما أنه ثقيل إذا وفقط إذا كانت كل نقطة مادية من نقاط هذا المائع تخضع لقوة ثقلها فقط.

ملاحظة1:

من الآن فصاعداً سنفرض أن المائع لا يصل إلى ارتفاعات عالية، ولا يمتد على مساحات واسعة. في هذه الحالة يكون تسارع الجاذبية الأرضية في كل نقطة مادية من نقاط هذا المائع هو المتجه الثابت $\vec{g}$، حيث $\vec{g}$ محمول على الشاقول الهابط، ويتجه نحو مركز الأرض، و $g = 9.81\, m/s^2$.

قوة الكتلة من أجل المائع الثقيل:

ليكن لدينا مائعاً ثقيلاً (إما ساكن أو جارٍ). في اللحظة $t > 0$ (لحظة الجريان)، نأخذ $d\tau$ حجماً عنصرياً اختيارياً من المائع الثقيل. ولتكن $M \equiv (x, y, z) \in d\tau$ نقطة مادية من $d\tau$، ولنفرض أن كتلة $d\tau$ هي dm.

بما أن $d\tau$ صغير، والمائع ثقيل، فبحسب تعريف المائع الثقيل تكون حاصلة القوى الخارجية المؤثرة بـ $d\tau$ هي:

$$d\vec{F}_e = dm.\vec{g}$$

ولكن بحسب تعريف قوة الكتلة في M يكون:

$$\vec{F}(M) = \frac{d\vec{F}_e}{dm} = \frac{dm.\vec{g}}{dm} = \vec{g}$$

إذاً قوة الكتلة المؤثرة في كل نقطة مادية M من المائع الثقيل هي نفسها تسارع الجاذبية الأرضية $\vec{g}$.

مبرهنة الأواني المستطرقة:

ليكن لدينا مائعاً ثقيلاً ومتوازناً، وكثافته الحجمية هـي $\rho(M)$، (حيث $M \equiv (x,y,z)$ نقطة مادية اختيارية من المائع الثقيل المتوازن)، ولتكن $Oxyz$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$، وعطالية، وفيها $\overrightarrow{Oz}$ شاقولي هابط. عندئذٍ:

1. حزمة سطوح سوية الضغط لهذا المائع هي مستويات أفقية.
2. إذا كان هذا المائع يملك سطحاً حراً، فالسطح الحر لهذا المائع هو أيضاً مستوٍ أفقي.
3. إذا كان المائع الثقيل المتوازن، غازاً ثقيلاً متوازناً، فإن حزمة سطوح سوية الكثافة لهذا الغاز الثقيل المتوازن هي أيضاً مستويات أفقية.

البرهان:

1. بما أن المائع ثقيل، فقوة الكتلة $\vec{F}(M)$ في كل نقطة مادية من نقاطه هي:

$$\vec{F}(M)=\vec{g}$$

بما أن المائع الثقيل متوازن تحت تأثير قوة الكتلة $\vec{F}(M)=\vec{g}$، فبحسب مبرهنة الشرط اللازم والكافي لتوازن الموائع، يكون:

$$\rho(M).\vec{g}=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع الثقيل المتوازن} \quad ......\ (1)$$

وحيث:

$$\overrightarrow{P_n}(M)=-P(M).\vec{n}\ ;\ P(M):=\left|\overrightarrow{P_n}(M)\right|$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع الثقيل المتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1$$

بإسقاط طرفي (1) على محاور الجملة الإحداثية (حيث $\overrightarrow{Oz}$ شاقولي هابط)، نجد:

$$\left.\begin{aligned}\rho(M).0&=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\\ \rho(M).0&=\frac{\partial P}{\partial y}(M)\\ \rho(M).g&=\frac{\partial P}{\partial z}(M)\end{aligned}\right\}\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع الثقيل المتوازن}$$

ومنه نجد:

$$\left.\begin{array}{l} \dfrac{\partial P}{\partial x}(M)=0 \\ \dfrac{\partial P}{\partial y}(M)=0 \\ \dfrac{1}{g}\dfrac{\partial P}{\partial z}(M)=\rho(M) \end{array}\right\} \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع الثقيل المتوازن} \quad ......(2)$$

من (2) نجد:

$P(M)=P(z)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع الثقيل المتوازن

فإذا كانت $M\equiv(x,y,z)$ نقطة مادية اختيارية تحقق: $z=c_1$، حيث c_1 ثابت حقيقي اختياري، عندئذٍ يكون:

$$P(M)=P(c_1)=c_2$$

أي أن $z=c_1$ هو سطح سوية ضغط، وبما أن c_1 اختياري، ينتج أن حزمة سطوح سوية الضغط لهذا المائع الثقيل المتوازن هي حزمة مستويات أفقية.

2. بحسب نتيجة سابقة تقول: " السطح الحر للمائع المتوازن هو سطح سوية ضغط"، وكون حزمة سطوح سوية الضغط هي وفقط هي مستويات أفقية، فنجد أن السطح الحر هو مستوٍ أفقي.

3. وجدنا في البند الأول 1، أن: $P(M)=P(z)$، وبالتالي:

$$\frac{\partial P}{\partial z}(M)=\frac{dP}{dz}(z)$$

فبحسب العلاقة الأخيرة من (2)، نجد:

$\rho(M)=\dfrac{1}{g}\dfrac{dP}{dz}(z)=\rho(z)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$ للغاز الثقيل المتوازن

إذاً أصبح لدينا:

$\rho(M)=\rho(z)\ ;\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$ للغاز الثقيل المتوازن

وبطريقة مشابهة للطريقة الموجودة في البند الأول 1، نجد أن حزمة سطوح سوية الكثافة للغاز الثقيل المتوازن هي مستويات أفقية.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 30 11 2010.

- جامعــــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثالثة والعشرون

تعريف1: (الضغط الجوي).

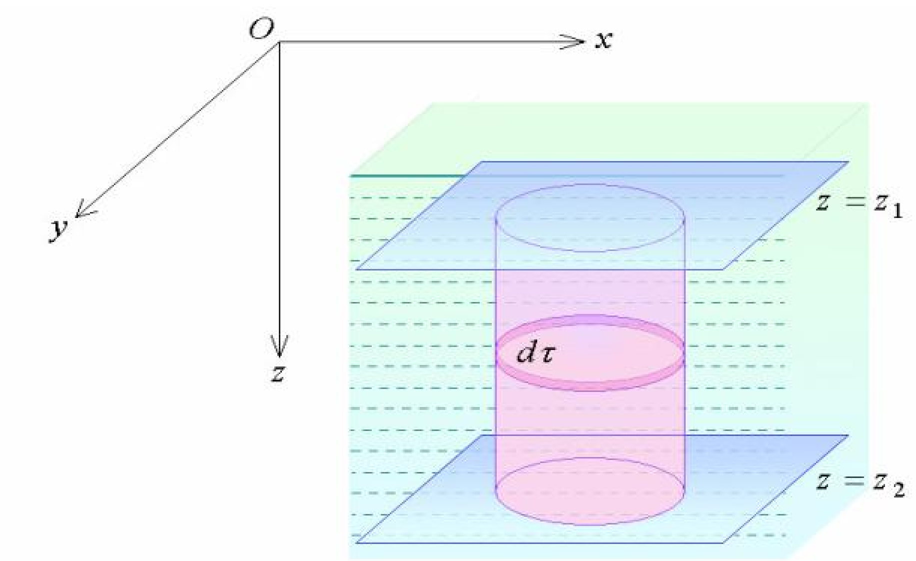
إذا كان لدينا مائعاً متوازناً ويملك سطحاً حراً، فبحسب ملاحظة سابقة فإن هذا السطح الحر هو سطح سوية ضغط للمائع المتوازن. ندعو قيمة الضغط المتساوية في جميع نقاط هذا السطح الحر بالضغط الجوي، ونرمز لهذا الضغط الجوي بالرمز P_0.

ملاحظة1: (هامة).

إذا كان لدينا مائعاً ثقيلاً متوازناً كثافته الحجمية هي $\rho(M)$، وكانت $Oxyz$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$، وعطالية، وفيها Oz شاقولي هابط.
وإذا كان τ حجماً من هذا المائع على شكل عمود اسطواني دائري مساحة مقطعه تساوي 1 ، ويمتد من المستوي الأفقي $z=z_1$، إلى المستوي الأفقي $z=z_2$، (حيث $z_1<z_2$). عندئذٍ فإن:

كتلة العمود τ هي: $m=\int_{z_1}^{z_2}\rho(z)\,dz$.

ووزن العمود τ هو: $w=g\int_{z_1}^{z_2}\rho(z)\,dz$.



البرهان:

ليكن $d\tau$ عنصراً حجمياً تفاضلياً من τ، كما هو موضح في الشكل المرافق، ولنفــرض أن كتلة $d\tau$ هي dm، وسماكة $d\tau$ هي dz. عندئذٍ حجم $d\tau$ يعطى: $d\tau = 1 \times dz = dz$.
هذا من جهة أولى، ومن جهة ثانية لدينا: $dm = \rho(M)\, d\tau$. ولكن بحسب مبرهنة الأواني المستطرقة فإن: $\rho(M) = \rho(z)$، وبالتالي:

$$dm = \rho(z)\, dz$$

وبالتالي وزن $d\tau$ هو:

$$dw = dm . g = g\, \rho(z)\, dz$$

وبالتالي، للحصول على كتلة τ ووزنه ؛ نكامل على τ فنجد:

$$m = \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$$

$$w = g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$$

نتيجة1:

إذا كان المائع الثقيل المتوازن هو سائل ثقيل متوازن كثافته الحجمية هي ρ. عندئذٍ:

$$m = \rho(z_2 - z_1) \;\; ; \;\; w = \rho g\, (z_2 - z_1)$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 2 12 2010.

- جامعـــــة البعــــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيــــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الرابعة والعشرون

نتيجة1:

ليكن لدينا مائعاً ثقيلاً ومتوازناً، وكثافته الحجمية هي $\rho(M)$، ولتكن $Oxyz$ جملة إحداثية ديكارتية قائمة، يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$، وعطالية، وفيها $\overrightarrow{Oz}$ شاقولي هابط.
فإذا كانت $M_1 \equiv (x_1, y_1, z_1)$ نقطة أولى من هذا المائع قيمة الضغط عندها هي $P(M_1)$، و $M_2 \equiv (x_2, y_2, z_2)$ نقطة أخرى من هذا المائع قيمة الضغط عندها هي $P(M_2)$، وكان $z_1 < z_2$، عندئذٍ:

$$P(M_2) = P(M_1) + g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$$

<u>البرهان:</u>

عند إثبات مبرهنة الأواني المستطرقة وجدنا أن:

$$\left.\begin{array}{l} P(M) = P(z) \\ \rho(M) = \rho(z) \\ \dfrac{dP}{dz}(z) = g\,.\rho(z) \end{array}\right\} \forall M \equiv (x, y, z) \in \text{للمائع الثقيل المتوازن} \qquad .....(*)$$

ومن (*) نجد:

$$d\,P(z) = g\,.\rho(z)\, dz$$

وبالمكاملة من M_1 (والتي راقمها هو z_1) إلى M_2 (التي راقمها z_2) نجد:

$$P(z_2) - P(z_1) = g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$$

$$\Rightarrow$$

$$P(z_2) = P(z_1) + g \int_{z_1}^{z_2} \rho(z)\, dz$$

وهو المطلوب.

النتيجة السابقة تكافئ قولنا:

" الضغط عند النقطة الأكثر عمقاً يساوي الضغط عند النقطة الأقل عمقاً، مضافاً إلى ذلك وزن عمود شاقولي اسطواني دائري من المائع، مساحة مقطعه تساوي الواحد، ويمتد من المستوي الأفقي $z = z_1$ إلى المستوي الأفقي $z = z_2$".

حالة خاصة:

إذا كان المائع الثقيل المتوازن هو سائل ثقيل متوازن، وكثافته الحجمية هي ρ، فتصبح النتيجة السابقة بالشكل:

$$P(z_2) = P(z_1) + g.\rho.(z_2 - z_1) \Rightarrow$$

$$P(z_2) - P(z_1) = g.\rho.(z_2 - z_1)$$

تعريف1:

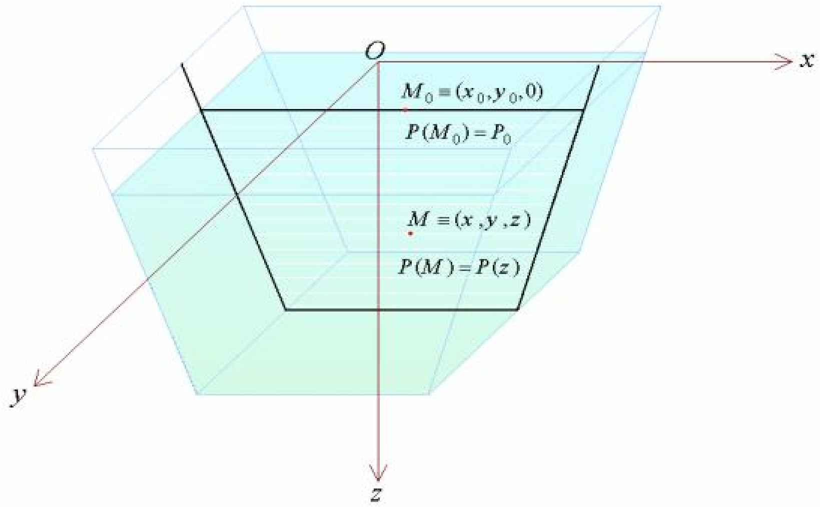
ندعوا المقدار $P(z_2) - P(z_1)$ بالزيادة في الضغط في النقطة M_2 عن الضغط في النقطة M_1.

نتيجة2:

ليكن لدينا مائعاً ثقيلاً ومتوازناً، ويملك سطحاً حراً، فبحسب مبرهنة الأواني المستطرقة فإن حزمة سطوح سوية الضغط، والسطح الحر وكذلك حزمة سطوح سوية الكثافة (في الحالة الغازية) هي مستويات أفقية. لنختار الجملة $Oxyz$ ، جملة إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$، وعطالية، وفيها $\overrightarrow{Oz}$ شاقولي هابط، وبحيث ينطبق المستوي الأفقي Oxy على السطح الحر للمائع.

بحسب مبرهنة الأواني المستطرقة لدينا:

$$\left.\begin{array}{l} P(M) = P(z) \\ \rho(M) = \rho(z) \\ \dfrac{dP}{dz}(z) = g.\rho(z) \end{array}\right\} \forall M \equiv (x, y, z) \in \text{للمائع الثقيل المتوازن} \qquad ..... (*)$$



بمكاملة العلاقة الأخيرة في (*) من $M_0 \equiv (x_0, y_0, 0)$ التي تنتمي للسطح الحر للمائع الثقيل المتوازن، وحيث الضغط عندها هو الضغط الجوي $P(M_0) = P_0$، إلى النقطة $M \equiv (x, y, z)$ من المائع حيث الضغط هو $P(M) = P(z)$ و $z > 0$ ؛ فنجد:

$$P(z) - P_0 = g \int_0^z \rho(z)\, dz \quad \Rightarrow$$

$$P(z) = P_0 + g \int_0^z \rho(z)\, dz$$

حالة خاصة:

إذا كان المائع الثقيل المتوازن هو سائل ثقيل متوازن فإن:

$$P(z) = P_0 + g.\rho.z$$

وهذا يعني أن الضغط في أي نقطة من نقاط السائل الثقيل المتوازن، والذي يملك سطحاً حراً، يساوي الضغط الجوي، مضافاً إلى ذلك $g.\rho.z$ حيث z هو بعد النقطة المادية M عن السطح الحر للسائل الثقيل المتوازن. والزيادة في الضغط تكون:

$$P(z) - P_0 = g.\rho.z$$

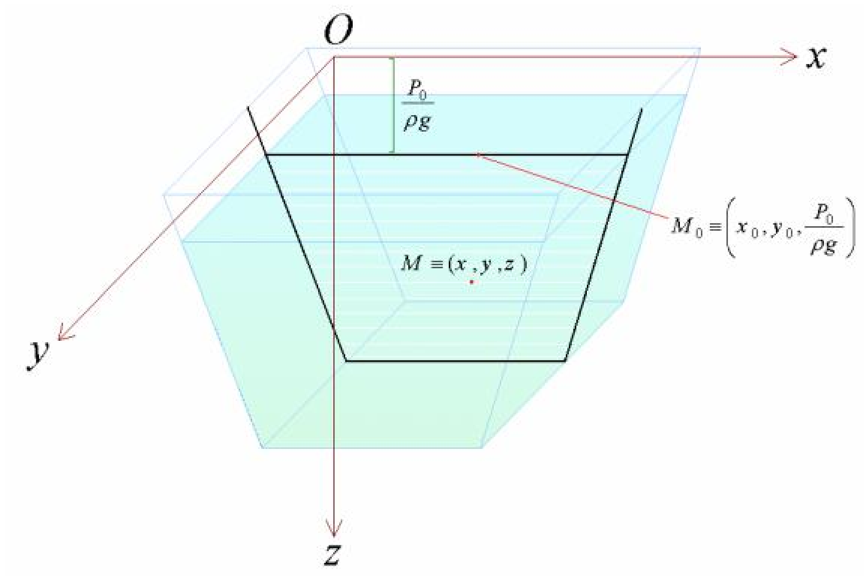
أي تتناسب طرداً مع z، حيث z هو بعد النقطة المادية M عن السطح الحر للسائل الثقيل المتوازن.

تعريف2: (المستوي المختزل لسائل ثقيل متوازن، ويملك سطحاً حراً).

ليكن لدينا سائلاً ثقيلاً متوازناً، ويملك سطحاً حراً، ولنفرض أن كثافته الحجمية هي ρ. ندعو المستوي الأفقي الذي يعلو السطح الحر بمقدار $\frac{P_0}{\rho g}$ بالمستوي المختزل للسائل الثقيل المتوازن.

نتيجة3:

لنختار الجملة $Oxyz$ ، جملة إحداثية ديكارتية قائمة يمينية مباشرة، وقاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$، وعطالية، وفيها $\overrightarrow{Oz}$ شاقولي هابط، وبحيث يقع المستوي الأفقي xOy فوق السطح الحر، ويبعد عنه بمقدار $\frac{P_0}{\rho g}$.



بحسب مبرهنة الأواني المستطرقة يكون:

$$\left.\begin{array}{l} P(M)=P(z) \\ \frac{dP}{dz}(z)=g.\rho \end{array}\right\} \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للسائل الثقيل المتوازن} \quad .....(*')$$

بمكاملة العلاقة الأخيرة في $(*')$ من النقطة المادية $M_0 \equiv (x_0, y_0, \frac{P_0}{\rho g})$ التي تنتمي للسطح الحر للسائل الثقيل المتوازن، وحيث الضغط عندها هو الضغط الجوي

$P(M_0)=P_0$، إلـــى النقطـــة $M \equiv (x, y, z)$ مـــن الـــسائل حيـــث الـــضغط هـــو $P(M)=P(z)$ و $z > \frac{P_0}{\rho g}$ ؛ فنجد:

$$P(z)-P_0 = g.\rho.\left(z-\frac{P_0}{\rho g}\right) = g.\rho.z - P_0 \Rightarrow$$

$$P(z)=\rho.g.z$$

ومنه النتيجة الهامة التالية:

" الضغط في أي نقطة من نقاط سائل ثقيل متوازن، ويملك سطحاً حراً، يساوي $g.\rho.z$، حيث z هو بعد النقطة المادية عن المستوي المختزل للسائل الثقيل المتوازن".

تعريف2:

ليكن لدينا سائلان ثقيلان، الكثافة الحجمية للأول هي ρ_1، والكثافة الحجمية للثاني هـــي ρ_2. نقول أن السائل الثاني أثقل من السائل الأول، أو السائل الأول أخفّ من السائل الثاني إذا وفقط إذا كان: $\rho_1 < \rho_2$.

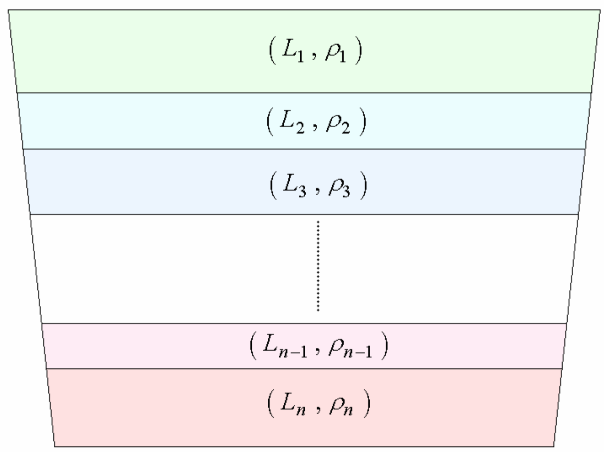
نتيجة4:

إذا كان لدينا n من السوائل الثقيلة المتوازنة، والمختلفة، وغير القابلة للخلط، بحيث:

$$\rho_1 < \rho_2 < \rho_3 < \ ... \ < \rho_n$$

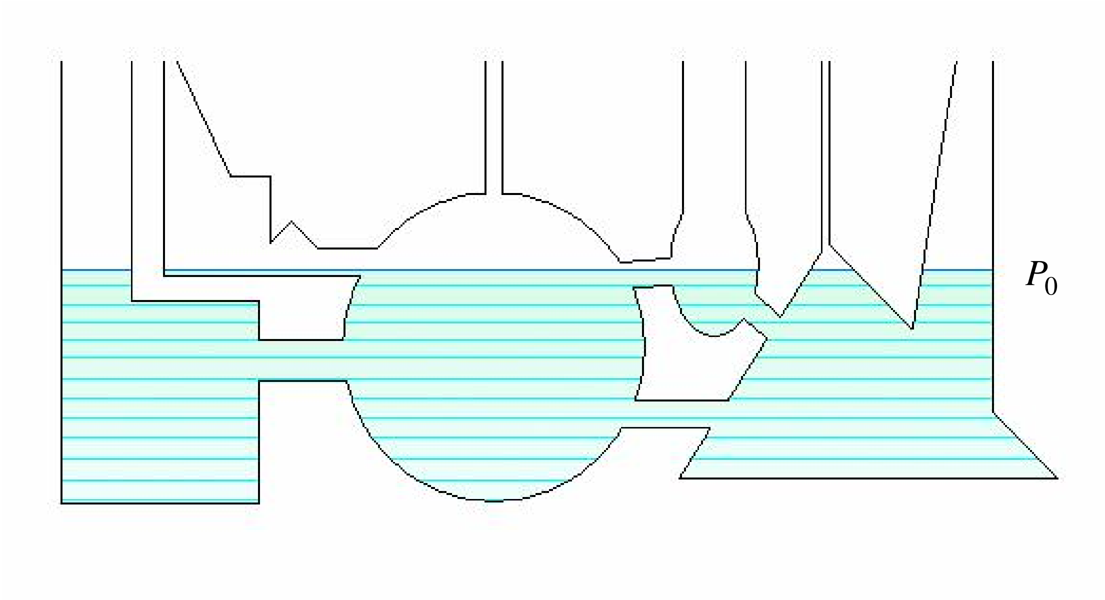
عندئذٍ تتوضع هذه السوائل فوق بعضها البعض، بالشكل التالي:

لاحظ أن السطوح الفاصلة بين السوائل (وهي كما نعلم ســـطوح ســـوية ضغط للمائع الكلي) تكـــون على شـــكل مســـتويات أفقية.



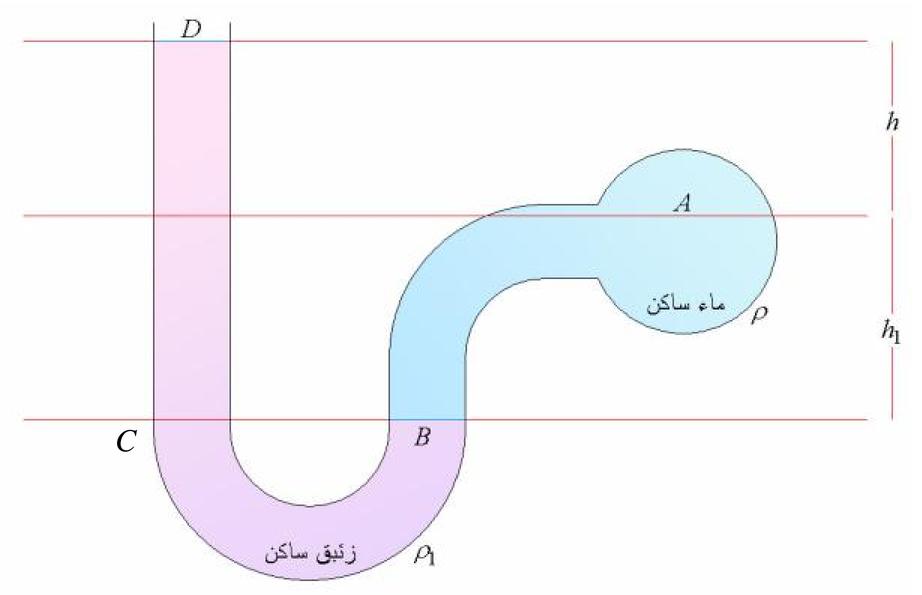
الشكل الفيزيائي لمبرهنة الأواني المستطرقة: (مبدأ الأواني المستطرقة).

أياً كان حجم وشكل الإناء الحاوي على السائل الثقيل المتوازن الذي يملك سطحاً حراً، فــإن النقاط المادية من هذا السائل والتي تبعد عن السطح الحر نفس البعد، تملك نفس قيمة الضغط.



تمرين1:

انظر إلى مقياس الضغط في الشكل التالي.



في مقياس الضغط السابق لدينا سائلان ثقيلان، وساكنان. السائل الأول من D إلى B هو زئبق ساكن، كثافته الحجمية ρ_1 (معطاة)، ويملك سطحاً حراً في D، والسائل الثاني هو ماء ساكن من B إلى نهاية الجزء المتبقي من المقياس، كثافته الحجمية ρ (معطاة).

فإذا علمت أن بعد المستوي الأفقي لـ A عن المستوي الأفقي لـ D هو h (معطى)، وبعد المستوي الأفقي لـ A عن المستوي الأفقي لـ B هو h_1 (معطى). والمطلوب:

حساب $P(A)-P_0$ حيث P_0 هو الضغط الجوي الذي يسود D.

(فكرة الحل: باعتبار B جزء من الزئبق، فإن الضغط في B يساوي الضغط في C، والذي بدوره يساوي $P_0+\rho_1.g.(h+h_1)$. وباعتبار أن B جزء من الماء، فإن الضغط في B يساوي الضغط في A مضافاً إلى ذلك $\rho.g.h_1$. نطابق ثم نتابع الحل).

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 5 12 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلــــــــوم.
- قســــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

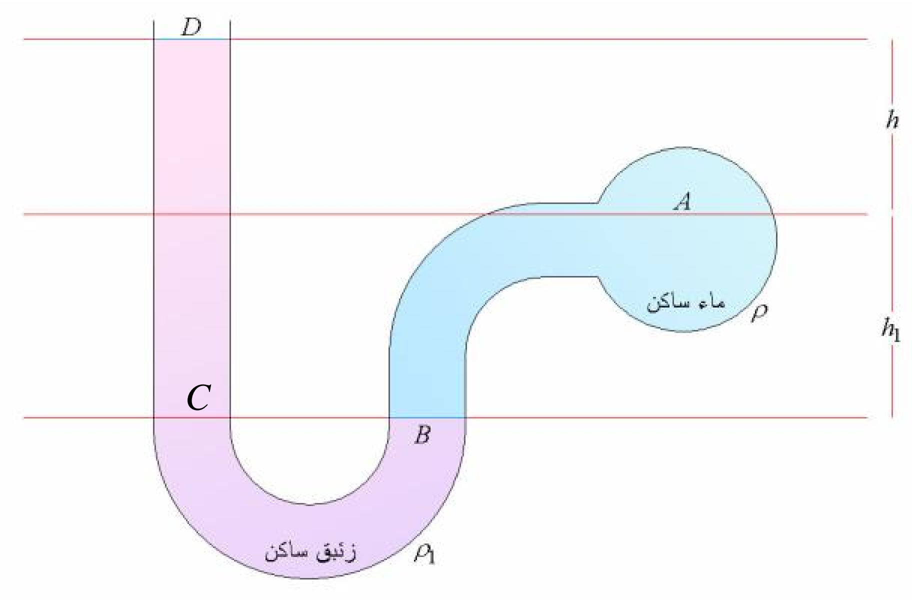
ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الخامسة والعشرون

تمرين1:

انظر إلى مقياس الضغط في الشكل التالي.



في مقياس الضغط السابق لدينا سائلان ثقيلان، وساكنان. السائل الأول من D إلى B هـو زئبق ساكن، كثافته الحجمية ρ_1 (معطاة)، ويملك سطحاً حراً في D، والسائل الثاني هو ماء ساكن من B إلى نهاية الجزء المتبقي من المقياس، كثافته الحجمية ρ (معطاة).

فإذا علمت أن بعد المستوي الأفقي لـ A عن المستوي الأفقي لـ D هو h (معطى)، وبعد المستوي الأفقي لـ A عن المستوي الأفقي لـ B هو h_1 (معطى).

والمطلوب: حساب $P(A)-P_0$ حيث P_0 هو الضغط الجوي الذي يسود D.

الحل:

إن اجتماع السائلين الثقيلين والساكنين هو مائع ثقيل وساكن (وبالتالي متوازن)، ويملك سطحاً حراً في D، حيث الضغط هو الضغط الجوي P_0، فبحسب مبرهنة الأواني المستطرقة فـإن حزمة سطوح سوية الضغط وكذلك السطح الحر للمائع الكلي هي وفقط هي مستويات أفقية.

وبما أن الزئبق والماء هما سائلان متوازنان و غير قابلان للخلط، فبحسب مبرهنة سابقة فإن السطح الفاصل بينهما هو سطح سوية ضغط للمائع الكلي.

وبما أن حزمة سطوح الضغط للمائع الكلي هي وفقط هي مستويات أفقية، فإن هـذا الـسطح الفاصل هو مستوٍ أفقي.

ومما سبق نجد:

$$P(B) = P(C)$$

حيث C هي نقطة مادية من الزئبق، وتقع مع B في نفس المستوي الأفقي.

ولكن:

$$P(C) = P_0 + \rho_1 . g . (h + h_1)$$

وبما أن B تنتمي للماء أيضاً يكون:

$$P(B) = P(A) + \rho . g . h_1$$

ومنه يكون:

$$P(A) + \rho . g . h_1 = P_0 + \rho_1 . g . (h + h_1) \quad ; \quad \rho_1 > \rho \Rightarrow$$

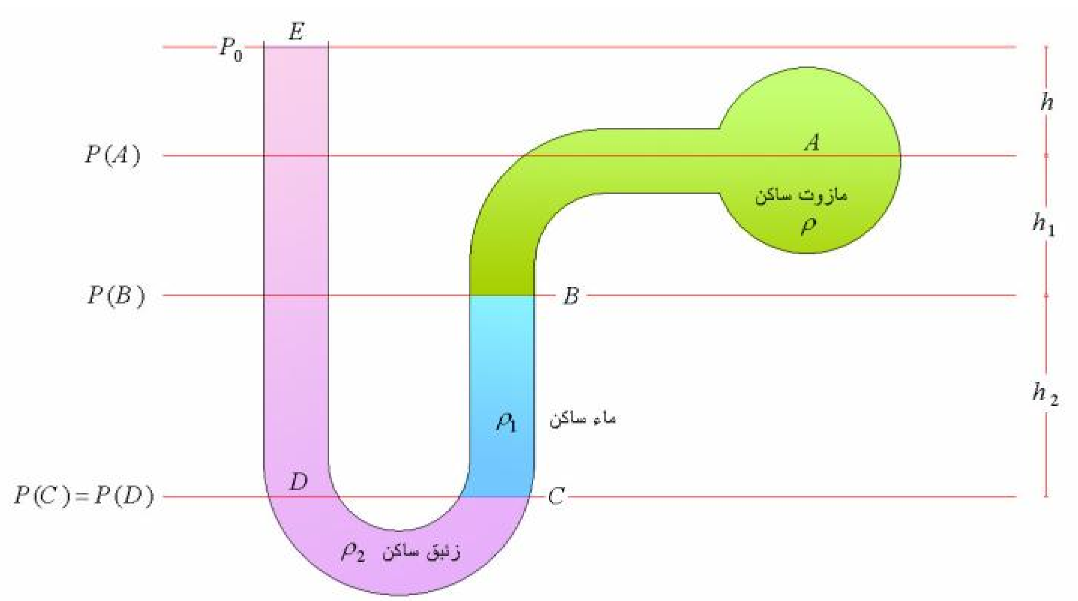
$$P(A) - P_0 = \rho_1 . g . (h + h_1) - \rho . g . h_1 \Rightarrow$$

$$P(A) - P_0 = (\rho_1 - \rho) . g . h_1 + \rho_1 . g . h$$

وهو المطلوب.

تمرين2:

انظر إلى مقياس الضغط في الشكل التالي:



في مقياس الضغط السابق لدينا ثلاثة سوائل ثقيلة وساكنة، ومتوضعة فوق بعضها البعض. السائل الأول من E إلى C هو زئبق ساكن، كثافته الحجمية ρ_2 (معطاة)، ويملك سطحاً حراً في E، والسائل الثاني من C إلى B هو ماء ساكن كثافته الحجمية ρ_1 (معطاة) والسائل الثالث هو مازوت ساكن من B إلى نهاية الجزء المتبقي من المقياس، كثافته الحجمية ρ (معطاة).

فإذا علمت أن بعد المستوي الأفقي لـ A عن المستوي الأفقي لـ E هو h (معطى)، وبعد المستوي الأفقي لـ A عن المستوي الأفقي لـ B هو h_1 (معطى). وبعد المستوي الأفقي لـ B عن المستوي الأفقي لـ C هو h_2 (معطى).

والمطلوب: حساب $P(A)-P_0$، حيث P_0 هو الضغط الجوي الذي يسود E.

الحل:

إن اجتماع السوائل الثقيلة والساكنة الثلاث المعطاة هو مائع ثقيل وساكن (وبالتالي متوازن)، ويملك سطحاً حراً في E، حيث الضغط هو الضغط الجوي P_0، فبحسب مبرهنة الأواني المستطرقة فإن حزمة سطوح سوية الضغط وكذلك السطح الحر للمائع الكلي هي وفقط هي مستويات أفقية.

وبما أن الزئبق والماء والمازوت هي سوائل متوازنة وغير قابلة للخلط، فبحسب مبرهنة سابقة فإن السطوح الفاصل بينها هي سطوح سوية ضغط للمائع الكلي.

وبما أن حزمة سطوح سوية الضغط للمائع الكلي هي وفقط هي مستويات أفقية، فإن هذين السطحين الفاصلين، كلٍ منهما مستوٍ أفقي.

ومما سبق نجد أن:

$$P(C)=P(D)$$

حيث D هي نقطة مادية من الزئبق، تقع مع C في نفس المستوي الأفقي.

لدينا:

$$P(C)=P(D)=P_0+\rho_2.g.(h_2+h_1+h)$$

$$P(C)=P(B)+\rho_1.g.h_2=P(A)+\rho.g.h_1+\rho_1.g.h_2$$

$$\Rightarrow$$

$$P_0+\rho_2.g.(h_2+h_1+h)=P(A)+\rho.g.h_1+\rho_1.g.h_2 \quad ; \quad \rho<\rho_1<\rho_2 ,$$

$$\Rightarrow$$

$$P(A)-P_0=-\rho.g.h_1-\rho_1.g.h_2+\rho_2.g.(h_2+h_1+h)$$

$$\Rightarrow$$

$$P(A)-P_0=g.h_1.\underbrace{(\rho_2-\rho)}_{\rho_2>\rho}+g.h_2.\underbrace{(\rho_2-\rho_1)}_{\rho_2>\rho_1}+\rho_2.g.h$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 9 12 2010.

- جامعــــة البعـــــــث .
- كليــــة العلـــــــــوم .
- قســــم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة السادسة والعشرون

الفصل الرابع (تحريك الموائع)

مقدمة:

أولاً: مبدأ دالامبير لنقطة مادية:

لتكن (M,m) نقطة مادية تخضع لقوى حاصلتها $\vec{F}(t)$ في اللحظة $t>0$، ولنفرض أن تسارعها في هذه اللحظة يكون $\vec{a}(t)$. عندئذٍ نسمي:

$$\vec{F}_D(t):=-m\vec{a}(t)$$

بقوة عطالة دالامبير للنقطة المادية M. وعندئذٍ يمكن صياغة مبدأ دالامبير للنقطة (M,m) كما يلي:

$$\vec{F}(t)+\vec{F}_D(t)=\vec{0} \quad ; \quad \forall t>0.$$

ثانياً: مبدأ دالامبير لمجموعة مادية:

لتكن: $\{(M_1,m_1),(M_2,m_2),\dots,(M_n,m_n)\}$ مجموعة مادية تخضع في اللحظة $t>0$ للقوى: $\{\vec{F}_1(t),\vec{F}_2(t),\dots,\vec{F}_n(t)\}$، ولنفرض عندئذٍ أن تسارعات نقاط هذه المجموعة في اللحظة $t>0$ هي: $\{\vec{a}_1(t),\vec{a}_2(t),\dots,\vec{a}_n(t)\}$. لنضع عندئذٍ:

$$\vec{F}(t):=\sum_{i=1}^{n}\vec{F}_i(t)$$

$$\vec{\mu}_o(t):=\sum_{i=1}^{n}\left[\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{F}_i(t)\right]$$

$$\vec{F}_D(t):=\sum_{i=1}^{n}\left[-m_i\,\vec{a}_i(t)\right]$$

$$\vec{\mu}_{o_D}(t):=\sum_{i=1}^{n}\left[-m_i\left(\overrightarrow{OM_i}\wedge\vec{a}_i(t)\right)\right]$$

نسمي $\vec{F}_D(t)$ بقوة عطالة دالامبير للمجموعة المادية. كما ندعوا $\vec{\mu}_{o_D}$ بالعزم الحاصل لقوى دالامبير بالنسبة لـ O.

عندئذٍ يمكن صياغة مبدأ دالامبير للمجموعة المادية بالشكل التالي:

$$\begin{cases} \vec{F}(t)+\vec{F}_D(t)=\vec{0} \quad ; \ \forall t>0 \\ \vec{\mu}_o(t)+\vec{\mu}_{o_D}(t)=\vec{0} \ ; \ \forall t>0 \end{cases}$$

ثالثاً: مبدأ عطالة دالامبير في الموائع:

لتكن $Oxyz$ جملة إحداثية ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$، وعطالية، وليكن لدينا مائعاً ما (ساكن أو جارٍ). في لحظة الجريان $t>0$، نأخذ τ حجماً اختيارياً من المائع، محاطاً بالسطح المغلق S، ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in S$ نقطة مادية اختيارية، و $\vec{n}$ متجه واحدة ناظم السطح S في M، والموجه نحو خارج τ (خارج S)، وليكن $d\tau$ عنصراً تفاضلياً حجمياً من τ، كتلته dm، ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in d\tau$. عندئذٍ يكون:

$$dm=\rho(M).d\tau$$

ولنفرض الآن أن تسارع $d\tau$ هو أيضاً $\vec{a}(M)$. عندئذٍ نسمي:

$$d\vec{F}_D:=-dm.\vec{a}(M)=-\rho(M)\,\vec{a}(M)\,d\tau$$

بقوة عطالة دالامبير لـ $d\tau$. عندئذٍ يكون عزم $d\vec{F}_D$ بالنسبة لـ O هو:

$$d\vec{\mu}_{o_D}:=-\rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}(M)\right]d\tau$$

وبالمكاملة على τ نحصل على:

$$\begin{cases} \vec{F}_D=-\int_\tau \rho(M)\,\vec{a}(M)\,d\tau \\ \vec{\mu}_{o_D}=-\int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}(M)\right]d\tau \end{cases}$$

تعريف1:

ندعوا الثنائية $\left(\vec{F}_D(t),\vec{\mu}_{o_D}(t)\right)$ حيث:

$$\begin{cases} \vec{F}_D=-\int_\tau \rho(M)\,\vec{a}(M)\,d\tau \\ \vec{\mu}_{o_D}=-\int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\overrightarrow{a}(M)\right]d\tau \end{cases}$$

بتورسور قوى عطالة دالامبير للحجم τ في اللحظة $t>0$.

نص مبدأ دالامبير للحجم τ:

1. بلغة القوة الحجمية $\vec{F}(M)$:

نعلم أن تورسور القوى الكلية لـــ τ بلغة القوة الحجمية هو:

$$\begin{cases} \int_{\tau}\vec{F}(M)\,d\tau + \int_{S}\vec{P}_n(M)\,dS \\ \int_{\tau}\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\right]d\tau + \int_{S}\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}_n(M)\right]dS \end{cases}$$

وفقاً لمبدأ دالامبير:

تورسور القوى الكلية لـــ τ مضافاً إليه تورسور قـوى عطالـة دالامبيـر يعطـي التورسور الصفري. أي:

$$\int_{\tau}\vec{F}(M)\,d\tau+\int_{S}\vec{P}_n(M)\,dS - \int_{\tau}\rho(M)\,\vec{a}(M)\,d\tau=\vec{0} \quad ; \ \forall t>0$$

$$\int_{\tau}\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\right]d\tau+\int_{S}\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}_n(M)\right]dS - \int_{\tau}\rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}(M)\right]d\tau \quad ; \ \forall t>0$$

$\Rightarrow$

$$(1)\begin{cases} \int_{\tau}\left[\vec{F}(M)-\rho(M)\,\vec{a}(M)\right]d\tau + \int_{S}\vec{P}_n(M)\,dS=\vec{0} \\ \int_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\left[\vec{F}(M)-\rho(M)\,\vec{a}(M)\right]d\tau + \int_{S}\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}_n(M)\right]dS=\vec{0} \end{cases}$$

ندعوا (1) بمعادلات تحريك الحجم τ من المائع بلغة القوة الحجمية.

2. بلغة قوة الكتلة $\vec{F}(M)$:

نعلم أن تورسور القوى الكلية لـــ τ بلغة قوة الكتلة هو:

$$\begin{cases} \int_\tau \rho(M)\vec{F}(M)\,d\tau + \int_S \vec{P}_n(M)\,dS \\ \int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\right]d\tau + \int_S \left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}_n(M)\right]dS \end{cases}$$

وفقاً لمبدأ دالامبير:

تورسور القوى الكلية لـــ τ مضافاً إليه تورسور قـــوى عطالـــة دالامبيـــر يعطـــي التورسور الصفري. أي:

$$\int_\tau \rho(M)\vec{F}(M)\,d\tau+\int_S \vec{P}_n(M)\,dS$$
$$-\int_\tau \rho(M)\,\vec{a}(M)\,d\tau=\vec{0} \quad ; \ \forall t>0$$

$$\int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{F}(M)\right]d\tau+\int_S \left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}_n(M)\right]dS$$
$$-\int_\tau \rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}(M)\right]d\tau \quad ; \ \forall t>0$$

$\Rightarrow$

$$(2)\begin{cases} \int_\tau \rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]d\tau + \int_S \vec{P}_n(M)\,dS=\vec{0} \\ \int_\tau \rho(M)\overrightarrow{OM}\wedge\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]d\tau+\int_S \left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{P}_n(M)\right]dS=\vec{0} \end{cases}$$

ندعوا (2) بمعادلات تحريك الحجم τ من المائع بلغة قوة الكتلة.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 12 12 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث .
- كليـــة العلـــــــــوم .
- قســـــم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة السابعة والعشرون

معادلات تحريك حجم τ على شكل منطقة بسيطة الترابط من مائع مثالي:

لتكن $Oxyz$ جملة إحداثية ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ وعطالية. وليكن لدينا مائعاً مثالياً. في اللحظة $t>0$ نأخذ حجماً τ اختيارياً من هذا المائع المثالي، بحيث أن τ منطقة بسيطة الترابط في $(\mathbb{R}^3,d)$ ولنفرض أن τ محاط بالسطح المغلق S. ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in S$ و $\vec{n}$ متجه واحدة ناظم السطح S في النقطة M والموجه نحو خارج τ (خارج S).

بحسب مبرهنة سابقة فإن تورسور القوى الكلية المؤثرة في τ يعطى:

1) بلغة القوة الحجمية:

$$(1)\quad \begin{cases} \vec{F}=\int_\tau\left[\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}P(M)\right]d\tau \\ \vec{\mu}_o=\int_\tau\overrightarrow{OM}\wedge\left[\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}P(M)\right]d\tau \end{cases}$$

2) بلغة قوة الكتلة و الكثافة الحجمية:

$$(2)\quad \begin{cases} \vec{F}=\int_\tau\left[\rho(M).\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}P(M)\right]d\tau \\ \vec{\mu}_o=\int_\tau\overrightarrow{OM}\wedge\left[\rho(M).\vec{F}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}P(M)\right]d\tau \end{cases}$$

حيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1 \end{cases}$$

وبحسب فقرة سابقة فإن تورسور قوى عطالة دالامبير لــ τ في اللحظة $t>0$ هو:

$$\begin{cases} \vec{F}_D(t)=-\int_\tau\rho(M).\vec{a}(M)\,d\tau \\ \vec{\mu}_{o_D}(t)=-\int_\tau\rho(M)\left[\overrightarrow{OM}\wedge\vec{a}(M)\right]d\tau \end{cases}$$

بتطبيق مبدأ دالامبير نجد أن:

$$\begin{cases} \vec{F}(t)+\vec{F}_D(t)=\vec{0} \quad ; \ \forall t>0 \\ \vec{\mu}_o(t)+\vec{\mu}_{o_D}(t)=\vec{0} \ ; \ \forall t>0 \end{cases}$$

ونميز الحالتين التاليتين:

1) بلغة القوة الحجمية $\vec{F}(M)$:

تصبح معادلات دالامبير على الشكل:

$$(3)\ \begin{cases} \int_\tau \left[\vec{F}(M)-\rho(M).\vec{a}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\vec{0} \ ; \ \forall t>0 \\ \int_\tau \overrightarrow{OM}\wedge\left[\vec{F}(M)-\rho(M).\vec{a}(M)-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right]d\tau=\vec{0} \ ; \ \forall t>0 \end{cases}$$

2) بلغة قوة الكتلة $\vec{F}(M)$ والكثافة الحجمية $\rho(M)$:

تصبح معادلات دالامبير على الشكل التالي:

$$(4)\ \begin{cases} \int_\tau \left\{\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right\}d\tau=\vec{0} \ ; \forall t>0 \\ \int_\tau \overrightarrow{OM}\wedge\left\{\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right\}d\tau=\vec{0} \ ; \forall t>0 \end{cases}$$

ندعوا (3) بمعادلات تحريك الحجم τ (والذي هو منطقة بسيطة الترابط) من مائع مثالي بلغة القوة الحجمية. كما ندعوا (4) بمعادلات تحريك الحجم τ (الذي هو منطقة بسطة الترابط) من مائع مثالي بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية.

معادلات تحريك مائع مثالي:

لتكن $Oxyz$ جملة إحداثية ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ وعطالية. وليكن لدينا مائعاً مثالياً. عندئذٍ يتحقق ما يلي:

أ) بلغة القوة الحجمية:

$$\vec{F}(M)-\rho(M).\vec{a}(M)=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\,;$$

$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي} \quad \wedge \quad \forall t>0.$$

ب) بلغة قوة الكتلة و الكثافة الحجمية:

$$\vec{F}(M)-\vec{a}(M)=\frac{1}{\rho(M)}\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\ ;$$
$$\forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي} \quad \wedge \quad \forall t>0.$$

حيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1 \end{cases}$$

برهان ب):

في اللحظة الاختيارية $t>0$ نأخذ حجماً τ اختيارياً من المائع المثالي على شكل منطقة بسيطة الترابط في الفضاء $(\mathbb{R}^3,d)$، ولنفرض أن τ محاط بالسطح المغلق S. ولتكن $M\equiv(x,y,z)\in S$ و $\vec{n}$ متجه واحدة ناظم السطح S في النقطة M والموجه نحو خارج τ. بحسب الفقرة السابقة فإن معادلات تحريك τ بلغة قوة الكتلة و الكثافة الحجمية هي:

$$(5)\begin{cases} \int\limits_{\tau}\left\{\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right\}d\tau=\vec{0}\ ;\forall t>0 \\ \int\limits_{\tau}\overrightarrow{OM}\wedge\left\{\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right\}d\tau=\vec{0}\ ;\forall t>0 \end{cases}$$

حيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1 \end{cases}$$

وبما أن $t>0$ اختيارية، و τ منطقة بسيطة الترابط اختيارية من المائع المثالي، و (5) لا تتحقق إلا وفقط إلا إذا كان:

$$\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)=\vec{0}\ ;$$
$$\forall t>0 \quad \wedge \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي}$$

و كذلك:

$$\overrightarrow{OM} \wedge \left\{ \rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]-\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\right\}=\vec{0}\ ;$$

$\forall t>0 \quad \wedge \quad \forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع المثالي

وخلاصة ما سبق هو العلاقة التالية:

$$\vec{F}(M)-\vec{a}(M)=\frac{1}{\rho(M)}\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\ ;$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع المثالي $\quad \wedge \quad \forall t>0.$

حيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للمائع المثالي} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1 \end{cases}$$

وهو المطلوب.

ونبرهن آ) بطريقة مشابهة.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 14 12 2010.

- جامعــــة البعـــــــــث .
- كليـــة العلـــــــــوم .
- قســــم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثامنة والعشرون

نتيجة1:

الشرط اللازم و الكافي حتى يكون المائع مثالي هو:

أ) إما أن تتحقق المعادلات التالية: (بلغة القوة الحجمية).

$$\vec{F}(M) - \rho(M).\vec{a}(M) = \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M);$$

$\forall M \equiv (x,y,z) \in$ للمائع $\wedge \ \forall t > 0.$

حيث: في كل لحظة $t > 0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \ ; \ \left|\vec{n}\right| = 1 \end{cases}$$

ب) أو أن تتحقق المعادلات التالية: (بلغة قوة الكتلة و الكثافة الحجمية).

$$\left.\begin{matrix} \vec{F}(M) - \vec{a}(M) = \dfrac{1}{\rho(M)} \overrightarrow{\text{grad}}\, P(M); \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall t > 0. \end{matrix}\right\} \quad .... \quad (*)$$

حيث: في كل لحظة $t > 0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \ ; \ \left|\vec{n}\right| = 1 \end{cases}$$

ومنه النتيجة التالية:

نتيجة2:

الشرط اللازم و الكافي لتوازن المائع المثالي هو أن يتحقق الشرط التالي:

$\overrightarrow{a}(M) = \overrightarrow{0} \ ; \ \forall M \equiv (x,y,z) \in$ للمائع المثالي

المعادلات الديكارتية السلّميّة لتحريك المائع المثالي:

ليكن لدينا مائعاً مثالياً يخضع لقوة الكتلة:

$$\vec{F}(M) = X(M)\,\vec{i} + Y(M)\,\vec{j} + Z(M)\,\vec{k}$$

نعلم أن:

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)=\frac{\partial P}{\partial x}(M)\,\vec{i}+\frac{\partial P}{\partial y}(M)\,\vec{j}+\frac{\partial P}{\partial z}(M)\,\vec{k}$$

كما نعلم أن:

$$\vec{a}(M)=\ddot{x}\,\vec{i}+\ddot{y}\,\vec{j}+\ddot{z}\,\vec{k}$$

بإسقاط (*) على المحاور الديكارتية $\overrightarrow{OX}$, $\overrightarrow{OY}$, $\overrightarrow{OZ}$ نجد:

$$\left.\begin{aligned} X(M)-\ddot{x}&=\frac{1}{\rho(M)}\frac{\partial P}{\partial x}(M)\\ Y(M)-\ddot{y}&=\frac{1}{\rho(M)}\frac{\partial P}{\partial y}(M)\\ Z(M)-\ddot{z}&=\frac{1}{\rho(M)}\frac{\partial P}{\partial z}(M)\end{aligned}\right\}\ \forall t>0\ \wedge\ \forall M\equiv(x,y,z)\in$$ للمائع المثالي

ندعوا المعادلات السابقة بالمعادلات الديكارتية السلّميّة لتحريك المائع المثالي بلغة قوة الكتلة و الكثافة الحجمية.

معادلات تحريك المائع المثالي الثقيل:

ليكن لدينا مائعاً مثالياً ثقيلاً، فبحسب ملاحظة سابقة فإن قوة الكتلة لهذا المائع المثالي الثقيل هي:

$$\vec{F}(M)=\vec{g}$$

حيث $\vec{g}$ هو تسارع الجاذبية الأرضية.

بالتعويض في (*) نجد أن المعادلة المتجهية لتحريك المائع المثالي الثقيل هي:

$$\vec{g}-\vec{a}(M)=\frac{1}{\rho(M)}\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\,;$$

$\forall M\equiv(x,y,z)\in$ للمائع المثالي الثقيل $\wedge\ \forall t>0.$

حيث: في كل لحظة $t > 0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \; ; \; \left|\vec{n}\right| = 1 \end{cases}$$

تعريف1:

نقول عن مائع ما (جارٍ أو ساكن) أنه يتصرف تصرف الجسم القاسي إذا وفقط إذا بقي البعــد بين أي نقطتين من نقاطه ثابتاً بتغير الزمن.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 16 12 2010.

- جامعـــة البعـــــــث .
- كليـــة العلــــــوم .
- قســـم الرياضيـــات .
- السنة الرابعة (ميكانيك) .

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة التاسعة والعشرون

التوازن النسبي للموائع المثالية:

لتكن $oxyz$ جملة إحداثية، ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$ وعطالية.
وليكن لدينا مائعاً مثالياً جارياً. عندئذٍ تكون معادلات تحريك هذا المائع المثالي الجاري بلغة قوة الكتلة والكثافة الحجمية هي:

$$\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \qquad .... \quad (1)$$

$\forall t>0 \ \wedge \ \forall M \equiv (x,y,z) \in$ للمائع المثالي الجاري

حيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$(1') \begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع المثالي الجاري} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \ ; \ |\vec{n}|=1 \end{cases}$$

لنفرض الآن أن هذا المائع المثالي الجاري يتصرف تصرف الجسم القاسي. ولتكن $OXYZ$ جملة متماسكة معه، قاعدتها $\{\vec{I}, \vec{J}, \vec{K}\}$. عندئذٍ يكون هذا المائع ساكن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$، وبالتالي متوازن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$. وعندئذٍ نقول أن (1) مأخوذة مع الشرط $(1')$ تمثل معادلة التوازن النسبي للمائع المثالي الجاري، تحت تأثير قوة الكتلة: $\vec{\text{F}}(M)=\vec{F}(M)-\vec{a}(M)$.

ملاحظة1: (هامة).

كافة التعاريف والنتائج والملاحظات والمبرهنات التي مرت معنا في حالة التوازن المطلق (بالنسبة لجملة عطالية) تبقى صحيحة في حالة التوازن النسبي (بالنسبة لجملة غير عطالية).

نتيجة1:

إذا كان المائع المثالي الجاري المتوازن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$ ثقيلاً. عندئذٍ تكون: $\vec{F}(M)=\vec{g}$ وبالتالي تصبح معادلة التوازن النسبي لهذا المائع الثقيل بالنسبة للجملة $OXYZ$ هي:

$$\rho(M)\left[\vec{F}(M)-\vec{a}(M)\right]=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \qquad .... \quad (2)$$

$\forall t>0 \ \wedge \ \forall M \equiv (x,y,z) \in$ للمائع المثالي الثقيل الجاري

حيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$(2') \begin{cases} \vec{P}_n(M) = -P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M) := \left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \equiv (x,y,z) \in \text{للمائع المثالي الثقيل الجاري} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \; ; \; |\vec{n}| = 1 \end{cases}$$

وكما درسنا مبرهنة الأواني المستطرقة في حالة التوازن المطلق، فإننا سندرس مبرهنة الأواني المستطرقة في حالة التوازن النسبي.

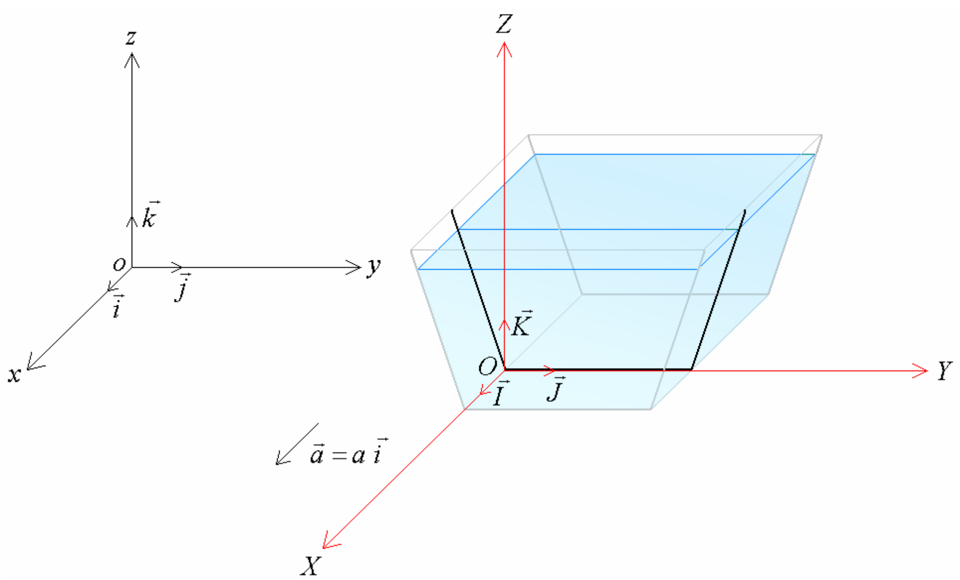
مبرهنة الأواني المستطرقة من أجل سائل مثال ثقيل ومتوازن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$:

لتكن $oxyz$ جملة إحداثية، ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\}$ وعطالية. ولنأخذ المحور $\overrightarrow{oz}$ شاقولياً صاعداً. وليكن لدينا سائلاً مثالياً جارياً، ثقيلاً ومتوازناً نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$ التي قاعدتها $\{\vec{I},\vec{J},\vec{K}\}$. ولنفرض أن هذا السائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً يتحرك حركة انسحابية تسارعها:

$.\vec{a} = a\,\vec{i} \quad ; \quad a = const$

ولنفرض أن هذا السائل أيضاً يملك سطحاً حراً.

عندئذٍ تكون حزمة سطوح سوية الضغط وكذلك السطح الحر لهذا السائل المثالي الثقيل هي مستويات تميل عن الأفق xoy بزاوية ظلها يساوي $-\dfrac{a}{g}$.



البرهان:

إن الحركة الانسحابية المعطاة تسمح لنا باختيار الجملة المتماسكة $OXYZ$ بحيث يكون $\overrightarrow{OZ}$ شاقولي صاعد. ونختار $\overrightarrow{OX}$ مسايراً لـ $\overrightarrow{ox}$ و $\overrightarrow{OY}$ مسايراً لـ $\overrightarrow{oy}$. عندئذٍ تكون معادلة التوازن النسبي لهذا السائل هي:

$$\rho[\vec{g}-\vec{a}(M)]=\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)\,; \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots (*)$$

$\forall M \in$ للسائل المثالي الثقيل $\wedge \ \forall t>0.$

وحيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \in \text{للسائل المثالي الثقيل} \quad \wedge \quad \forall \vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1 \end{cases}$$

ولكن:

$$\vec{a}(M)=a\,\vec{i}=a\,\vec{I}$$

$$\vec{g}=-g\ \vec{K}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,P(M)=\frac{\partial P}{\partial X}(M)\,\vec{I}+\frac{\partial P}{\partial Y}(M)\,\vec{J}+\frac{\partial P}{\partial Z}(M)\,\vec{K}$$

$;\ \forall M\equiv(X,Y,Z)\in$ للسائل المثالي الثقيل الجاري والمتوازن نسبياً

وبما أن هذا السائل المثالي الثقيل الجاري، متوازن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$ فإن قوة الكتلة $\vec{g}-a\,\vec{i}$ يجب أن تكون كمونية. (لاحظ من (*) قوة الكتلة في هذه الحالة)

بإسقاط (*) على المحاور $\overrightarrow{OX}$ و $\overrightarrow{OY}$ و $\overrightarrow{OZ}$ بالترتيب بدءاً من اليمين، نجد:

$$\left.\begin{aligned} \rho[0-a]&=\frac{\partial P}{\partial X}(M) \\ \rho[0-0]&=\frac{\partial P}{\partial Y}(M) \\ \rho[-g-0]&=\frac{\partial P}{\partial Z}(M) \end{aligned}\right\} \ \forall t>0 \ , \ \forall M\equiv(X,Y,Z)\in$$

للسائل المثالي الثقيل الجاري والمتوازن نسبياً

وبضرب طرفي المعادلة الأولى بـ dX والثانية بـ dY والثالثة بـ dZ، ومن ثم الجمع نحصل على:

$$-\rho(a\,dX+g\,dZ)=d\,P(M)\quad\Rightarrow$$

$$d\left[-\rho(aX+gZ)\right]=d\,P(M)$$

$\{\ \forall t>0\ ,\ \forall M\equiv(X,Y,Z)\in$ للسائل المثالي الثقيل الجاري والمتوازن نسبياً

بالمكاملة نجد:

$$P(M)=-\rho(aX+gZ)+c_1\quad;$$

$\forall t>0\ ,\ \forall M\equiv(X,Y,Z)\in$ للسائل المثالي الثقيل الجاري والمتوازن نسبياً

ولكي نحصل على حزمة سطوح سوية الضغط للسائل المثالي الثقيل الجاري والمتوازن نسبياً نضع: $P(M)=c_2$. فنجد:

$$-\rho(aX+gZ)+c_1=c_2\ \Rightarrow\ aX+gZ=\frac{c_1-c_2}{\rho}=c_3\ \Rightarrow\ Z=-\frac{a}{g}X+c$$

حيث أن كلاً من $c\ ,c_1\ ,c_2\ ,c_3$ هو ثابت حقيقي اختياري.

مما سبق نجد أن حزمة سطوح سوية الضغط هي مستويات تميل عن الأفق بزاوية ظلها $-\frac{a}{g}$. وبما أن السطح الحر هو سطح سوية ضغط للسائل، فينتج من ذلك أ ن السطح الحر هو أيضاً مستوٍ يميل عن الأفق بزاوية ظلها $-\frac{a}{g}$.

نتيجة2:

عندما $\vec{a}=\vec{0}$ تصبح الجملة $OXYZ$ عطالية، وبالتالي يصبح التوازن النسبي توازناً مطلقاً، حيث معادلة التوازن المطلق:

$$\rho\,\vec{g}=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\,;$$

$\forall M\in$ للسائل المثالي الثقيل $\quad\wedge\quad \forall t>0.$

وحيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M\equiv(x,y,z)\in \text{للسائل المثالي الثقيل} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ \left|\vec{n}\right|=1 \end{cases}$$

وتصبح حزمة سطوح سوية الضغط للمائع مستويات أفقية، وكذلك بالنسبة للسطح الحر فيصبح مستوٍ أفقي أيضاً.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 19 12 2010.

- جامعـــة البعـــــث.
- كليـــة العلـــــوم.
- قســـم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الثلاثون

ملاحظة1:

ليكن $Z=f(X,Y)>0$ سطحاً في $\mathbb{R}^3$ يقع فوق المستوي OXY. ولتكن:

$$D=\left\{(X,Y)\in\mathbb{R}^2 \ ; \ 0<X<\alpha \ , \ 0<Y<\beta\right\}$$

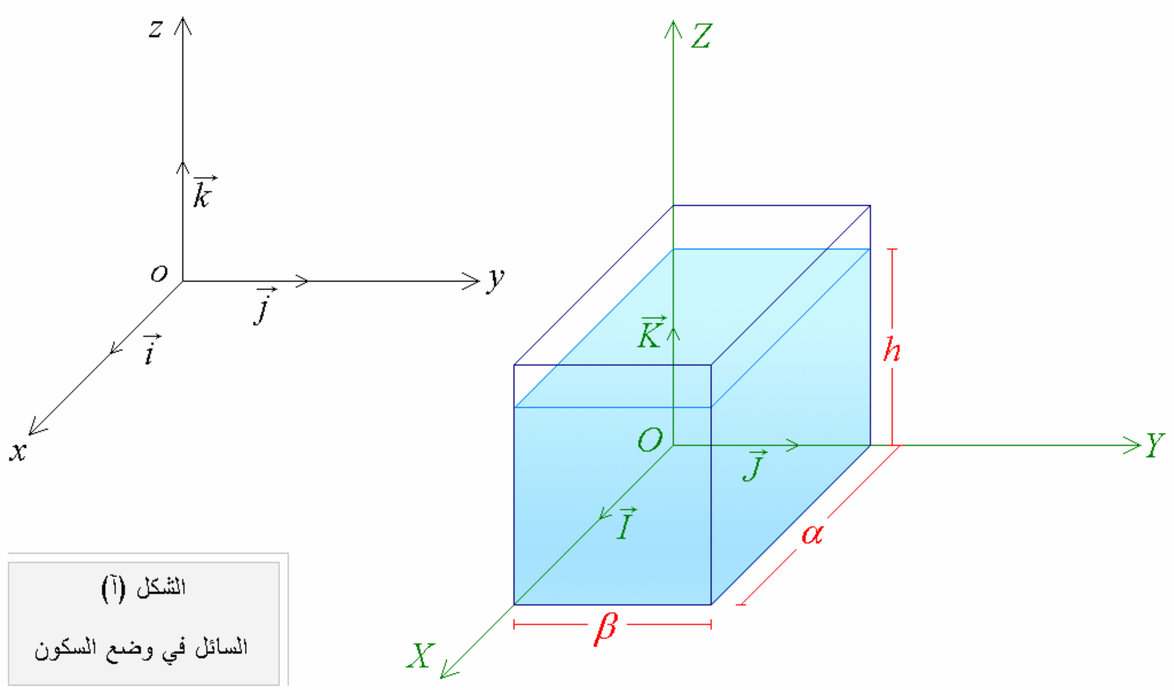
عندئذٍ فإن:

$$\iint_{\bar{D}} f(X,Y)\,dX\,dY=\int_0^{\alpha}dX\,.\int_0^{\beta}f(X,Y)\,dY=\int_0^{\beta}dY\,.\int_0^{\alpha}f(X,Y)\,dX$$

ويعطينا هذا التكامل الحجم V المحصور بين $\bar{D}$، والسطح Z، والمستويات الأربعة التالية: $X=0\,,X=\alpha\ ,\ Y=0\,,Y=\beta$.

نتيجة1:

ليكن لدينا إناء على شكل متوازي مستطيلات شاقولي، قاعدته هي مستطيل أفقي طوله α، وعرضه β. ولنفرض أن هذا الإناء يحوي حتى الارتفاع h من سائل مثالي ثقيل وساكن ويملك سطحاً حراً عند هذا الارتفاع. ولتكن $oxyz$ جملة مقارنة ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$ وعطالية، وفيها $\overrightarrow{oz}$ شاقولي صاعد. ولتكن $OXYZ$ جملة متماسكة مع الإناء، كما هو واضح في الشكلين (آ) و (ب).



الشكل (آ)
السائل في وضع السكون

وبحيث أن المحاور للجملتين متسايرة.

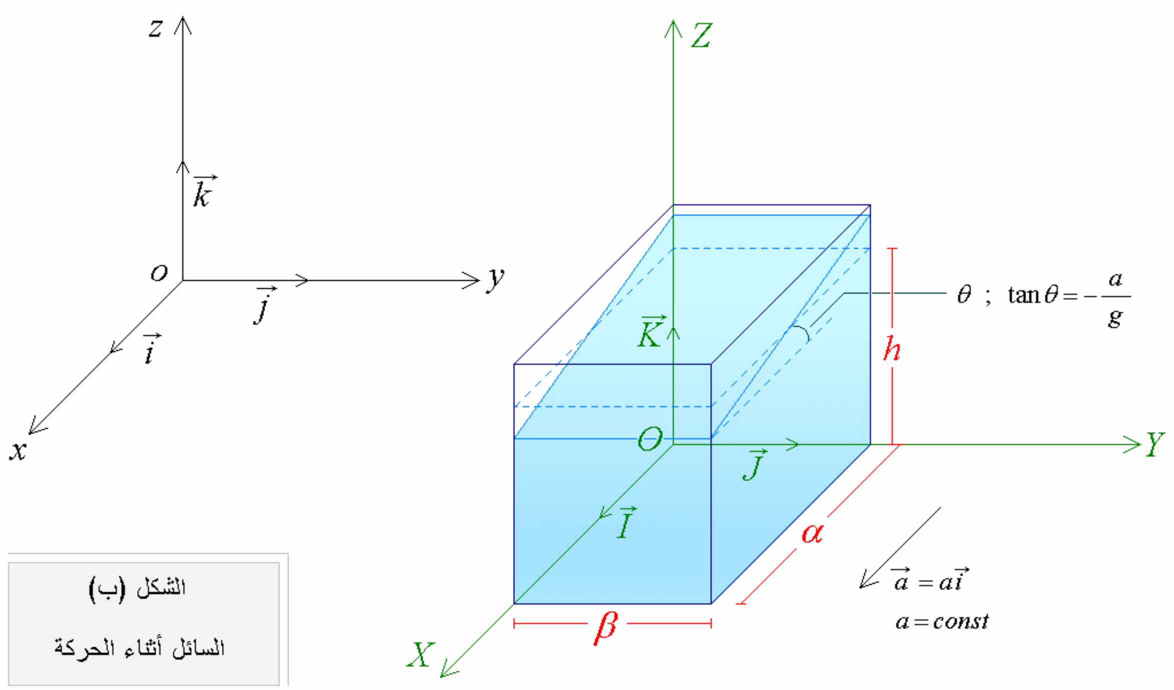
عندئذٍ تكون معادلة السطح الحر للسائل في الجملة $OXYZ$ هي: $Z = h$، (الشكل آ).

وبالتالي حجم السائل يعطى: $V = \alpha.\beta.h$.

لنحرك الآن هذا السائل المثالي الثقيل والجملة المتماسكة معه $OXYZ$ بحيث تتصرف هذه المجموعة تصرف الجسم القاسي المتحرك حركةً انسحابية تسارعها معطى بـــ:

$\vec{a} = a\,\vec{i} \quad ; \quad a = const.$

والمطلوب إيجاد معادلة السطح الحر للسائل في هذه الحالة.!؟



الشكل (ب)
السائل أثناء الحركة

نلاحظ أن هذا السائل المثالي الثقيل يحقق شروط مبرهنة الأواني المستطرقة في حالة التوازن النسبي بالنسبة للجملة $OXYZ$. عندئذٍ بحسب هذه المبرهنة تكون حزمة سطوح سوية الضغط لهذا السائل والسطح الحر له هي مستويات تميل عن الأفق OXY بزاوية ظلها يساوي $-\dfrac{a}{g}$.

ومعادلة هذه الحزمة هي:

$$Z = -\frac{a}{g}X + \mathrm{c}$$

حيث أن c ثابت حقيقي اختياري.

لنوجد الآن قيمة c الموافقة للسطح الحر للسائل.

تحدد قيمة c انطلاقاً من الحقيقة التي تقول أن: $\mathrm{V} = \alpha.\beta.h$ (حجم السائل أثناء الســكون)، يجب أن يساوي حجم السائل V أثناء الحركة ؛ أي أن:

$$\alpha.\beta.h = \mathrm{V} = \iint_{\bar{D}} Z(X,Y)\,dX\,dY = \int_0^\beta dY \int_0^\alpha \left(-\frac{a}{g}X + \mathrm{c}\right)dX$$

حيث:

$$\bar{D} = \left\{(X,Y) \in \mathbb{R}^2 \;\; ; \;\; 0 \le X \le \alpha \;,\; 0 \le Y \le \beta\right\}$$

ومنه:

$$\mathrm{V} = \int_0^\beta dY \left[-\frac{a}{2g}X^2 + \mathrm{c}X\right]_0^\alpha = \int_0^\beta dY \left[-\frac{a}{2g}\alpha^2 + \mathrm{c}\alpha\right]$$

$$= \beta\left[-\frac{a}{2g}\alpha^2 + \mathrm{c}\alpha\right] \Rightarrow$$

$$\alpha.\beta.h = \beta\left[-\frac{a}{2g}\alpha^2 + \mathrm{c}\alpha\right] \Rightarrow \mathrm{c} = \frac{a}{2g}\alpha + h$$

نعوض قيمة c في حزمة سطوح سوية الضغط لنجد معادلة السطح الحر، وهي:

$$Z = -\frac{a}{g}\left(X - \frac{1}{2}\right) + h$$

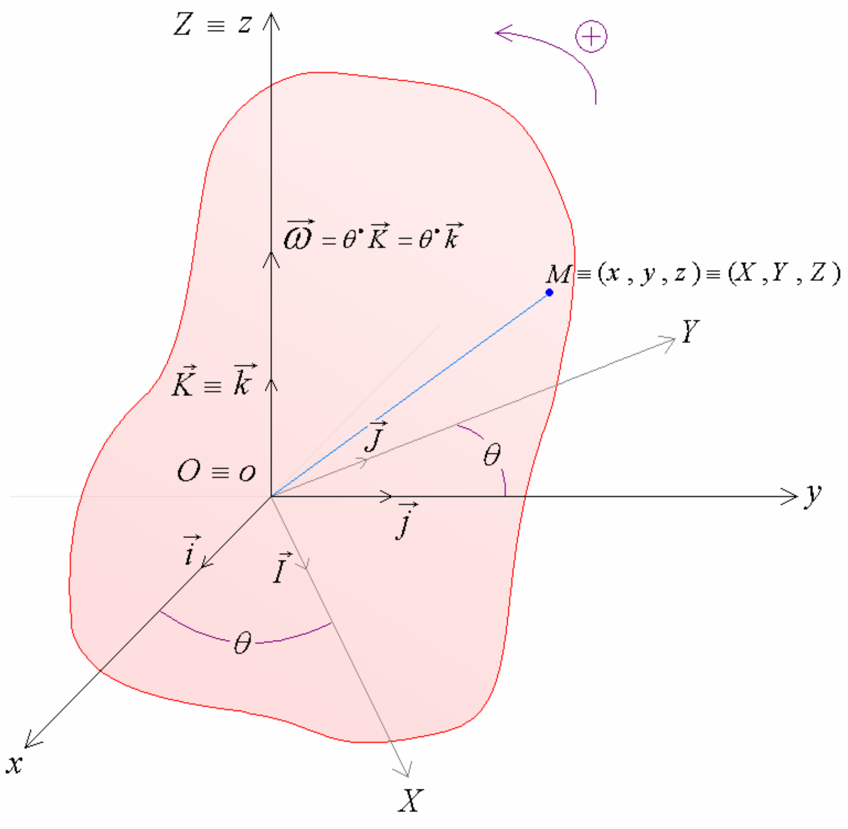
نتيجة2:

بجعل $a = 0$ في المعادلة الأخيرة، تصبح معادلة السطح الحر هي: $Z = h$.

(حالة مبرهنة الأواني المستطرقة في حالة التوازن المطلق).

تذكرة من الميكانيك2:

لتكن $oxyz$ جملة إحداثية، ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\{\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\}$، وعطالية.
وليكن S جسماً قاسياً ستحرك حركة دورانية حول المحور الثابت $\overrightarrow{oz}$ منه، ولتكن $OXYZ$ جملة متماسكة مع الجسم S، بحيث $\overrightarrow{OZ}$ ينطبق على $\overrightarrow{oz}$، كما في الشكل:



عندئذٍ يكون للحركة وسيط وحيد هو θ (زاوية الدوران).
كما أن متجه السرعة الزاوية (متجه الدوران) $\vec{\omega}$ للجسم يعطى:

$$\vec{\omega} = \dot{\theta}\vec{k} = \dot{\theta}\vec{K}$$

ومتجه التسارع الزاوي $\vec{\varepsilon}$ للجسم هو:

$$\vec{\varepsilon} = \ddot{\theta}\vec{k} = \ddot{\theta}\vec{K}$$

فإذا كانت: $M \equiv (x, y, z) \equiv (X, Y, Z)$. فإن:

$$\vec{V}_M = \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM} = \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = -\dot{\theta}\left(Y\ \vec{I} - X\ \vec{J}\right)$$

وكذلك:

$$\vec{a}_M = \vec{\varepsilon} \wedge \overrightarrow{OM} + \vec{\omega} \wedge \left(\vec{\omega} \wedge \overrightarrow{OM}\right)$$

$$= \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \ddot{\theta} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \vec{I} & \vec{J} & \vec{K} \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ -\dot{\theta}Y & -\dot{\theta}X & 0 \end{vmatrix}$$

$$= -\ddot{\theta}\left(Y\ \vec{I} - X\ \vec{J}\right) - \left(\dot{\theta}\right)^2\left(X\ \vec{I} + Y\ \vec{J}\right)$$

حالة خاصة:

إذا كانت: $\ddot{\theta} = 0$، وذلك $\forall\ t > 0$. عندئذٍ فالحركة تكون دورانية منتظمة، بسرعة زاوية $\vec{\dot{\theta}} = \vec{\omega}$ ثابتة، وعندئذٍ يكون:

$$\vec{V}_M = -\omega\left(Y\ \vec{I} - X\ \vec{J}\right)$$

$$\vec{a}_M = -\omega^2\left(X\ \vec{I} + Y\ \vec{J}\right).$$

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 21 12 2010.

- جامعـــــة البعـــــــــث.
- كليـــة العلـــــــــوم.
- قســـــم الرياضيـــات.
- السنة الرابعة (ميكانيك).

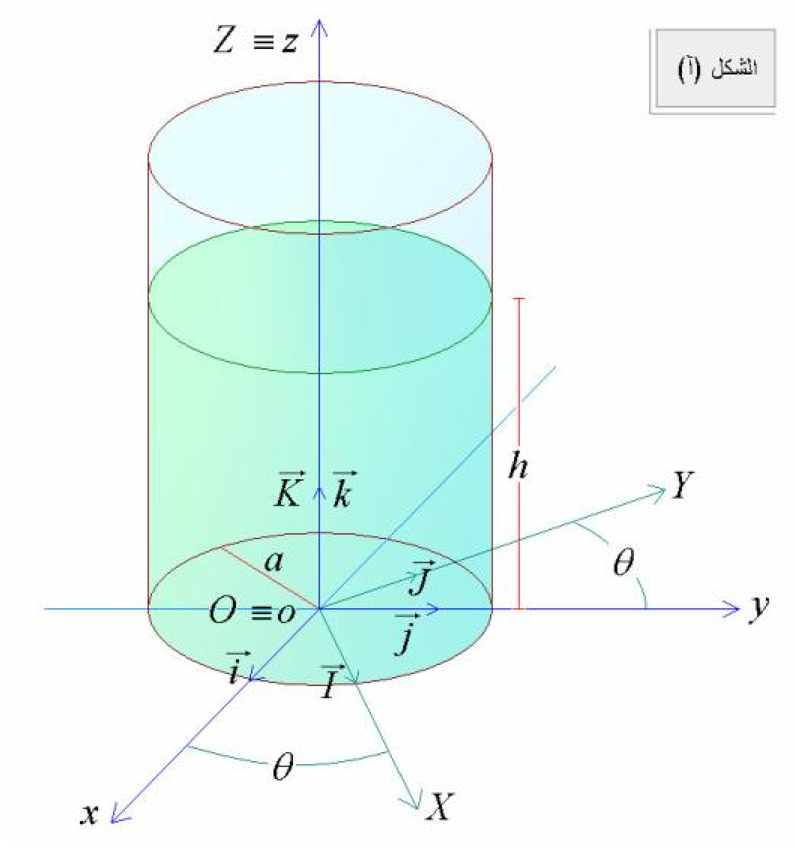
ميكانيك السوائل

القسم النظري

المحاضرة الحادية والثلاثون

مسألة:

لتكن $oxyz$ جملة إحداثية، ديكارتية، قائمة، يمينية، مباشرة، قاعدتها $\left\{\vec{i},\vec{j},\vec{k}\right\}$، وعطالية، وفيها $\overrightarrow{oz}$ شاقولي صاعد. وليكن لدينا إناء مفتوح على شكل اسطوانة شاقولية، قاعدتها دائرة أفقية نصف قطرها a وتقع في المستوي oxy. ولنفرض أن $\overrightarrow{oz}$ هو محور الاسطوانة المأخوذة، وهذه الاسطوانة تحوي على ارتفاع h من سائل مثالي ثقيل وساكن (الشكل آ).
ولتكن $OXYZ$ جملة متماسكة مع الإناء وفيها $\overrightarrow{OZ}$ منطبق على $\overrightarrow{oz}$ (و $O\equiv o$).
لنجعل السائل يتصرف مع الإناء تصرف الجسم القاسي الذي يدور حول المحور الثابت منه $\overrightarrow{OZ}$ بمتجه سرعة زاوية $\vec{\omega}=\omega\,\vec{k}$ ($\omega=const$). والمطلوب إيجاد حزمة سطوح سوية الضغط لهذا السائل المتوازن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$، وإيجاد معادلة السطح الحر له.



الحل:

إن السائل ساكن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$، وبالتالي فهو متوازن نسبياً بالنسبة للجملة $OXYZ$، ومنه معادلة التوازن النسبي:

$$\rho\left[\vec{g}-\vec{a}(M)\right]=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M) \qquad .... \qquad (1)$$

$; \ \forall t>0 \quad , \quad \forall M \equiv (X, Y, Z) \in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً

وحيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases} \vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M \in \text{للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً} \quad \wedge \quad \forall \vec{n} \ ; \ \left|\vec{n}\right|=1 \end{cases}$$

لدينا:

$$\vec{g}=-g\,\vec{K}$$

$$\vec{a}(M)=-\omega^2\left(X\,\vec{I}+Y\,\vec{J}\right)$$

$$\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)=\frac{\partial P}{\partial X}(M)\,\vec{I}+\frac{\partial P}{\partial Y}(M)\,\vec{J}+\frac{\partial P}{\partial Z}(M)\,\vec{K}$$

حيث أن $\left\{\vec{I},\vec{J},\vec{K}\right\}$ هي قاعدة الجملة المتماسكة مع الإناء $OXYZ$.

بإسقاط طرفي العلاقة (1) على محاور الجملة $OXYZ$ نجد:

$$\left.\begin{array}{lll} on\ \overrightarrow{OX} & : & \rho\,\omega^2 X = \dfrac{\partial P}{\partial X}(M) \\ on\ \overrightarrow{OY} & : & \rho\,\omega^2 Y = \dfrac{\partial P}{\partial Y}(M) \\ on\ \overrightarrow{OZ} & : & -\rho g = \dfrac{\partial P}{\partial Z}(M) \end{array}\right\} ;$$

$\forall t>0 \ , \ \forall M \equiv (X, Y, Z) \in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً

نضرب طرفي المعادلة الأولى بـــ dX، وطرفي المعادلة الثانية بـــ dY، وطرفي المعادلة الثالثة بـــ dZ. ثم نجمع النواتج فنحصل على:

$$\rho\left[\omega^2\left(X\,dX+Y\,dY\right)-g\,dZ\right]=d\,P(M) \ ;$$

$\forall t>0 \ , \ \forall M \equiv (X, Y, Z) \in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً

$$\Rightarrow \; d\left\{ \rho \left[\frac{\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right) - g\,Z \right] \right\} = d\,P(M) \;\; ;$$

$\forall\, t > 0 \;\; , \;\; \forall M \equiv (X, Y, Z) \in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً

ومنه نجد:

$$P(M) = \rho \left[\frac{\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right) - g\,Z \right] + c_1 \;\; ;$$

$\forall\, t > 0 \;\; , \;\; \forall M \equiv (X, Y, Z) \in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً

وكي نحصل على حزمة سطوح سوية الضغط نضع $P(M) = c_2$. بالتعويض في العلاقة الأخيرة وبعد سلسلة من العمليات نجد أن:

$$c_2 = \rho \left[\frac{\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right) - g\,Z \right] + c_1 \;\Rightarrow$$

$$\rho \left[\frac{\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right) - g\,Z \right] = c_3 \Rightarrow \frac{\omega^2}{2}\left(X^2+Y^2\right) - g\,Z = c_4 \Rightarrow$$

$$Z = \frac{\omega^2}{2g}\left(X^2+Y^2\right) + c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*) \qquad ;$$

$\forall\, t > 0 \;\; , \;\; \forall M \equiv (X, Y, Z) \in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن نسبياً

حيث: $c \,,\, c_1 \,,\, c_2 \,,\, c_3 \,,\, c_4$ هي ثوابت حقيقية اختيارية.

ومن (*) نجد أن حزمة سطوح سوية الضغط للسائل المتوازن نسبياً هي مجسمات قطوع مكافئة دورانية، محور دورانها هو $\overrightarrow{oz}$.

وبما أن السطح الحر هو سطح سوية ضغط للسائل المتوازن نسبياً، فإن السطح الحر لهذا السائل هو مجسم قطع مكافئ دوراني (الشكل ب)، معادلته من الشكل:

$$Z = \frac{\omega^2}{2g}\left(X^2+Y^2\right) + c \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (*)$$

ولنحدد قيمة الثابت c التي توافق السطح الحر للسائل.

من أجل ذلك ننطلق من الحقيقة التي تقول أن حجم السائل V أثناء السكون (والذي يساوي $\pi a^2 h$) يجب أن يساوي حجم السائل V أثناء الحركة. أي أن:

$$\pi a^2 h = \iint_{\bar{D}} \left[\frac{\omega^2}{2g} \left(X^2 + Y^2 \right) + \mathrm{c} \right] dX\, dY$$

حيث: $\bar{D} = \left\{ (X, Y) \in \mathbb{R}^2 \;;\; X^2 + Y^2 \le a^2 \right\}$.

وباستخدام الإحداثيات القطبية، ومن ثم المكاملة والاختصار نحصل على:

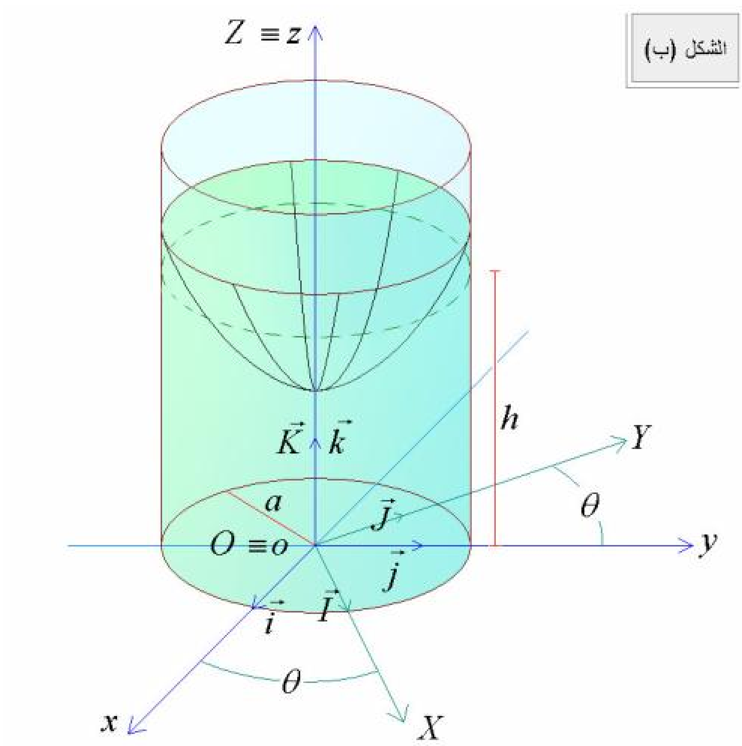
$$X = r\cos\theta \;,\; Y = r\sin\theta \quad ; \quad 0 \le \theta \le 2\pi \;,\; 0 \le r \le a$$

$$\Rightarrow \quad dX\, dY = r\, dr\, d\theta \quad \Rightarrow$$

$$\pi a^2 h = \int_0^{2\pi} d\theta \int_0^a \left[\frac{\omega^2}{2g} r^2 + \mathrm{c} \right] r\, dr = \Big[\theta \Big]_0^{2\pi} . \left[\frac{\omega^2}{8g} r^4 + \frac{\mathrm{c}}{2} r^2 \right]_0^a$$

$$= \pi \frac{\omega^2}{4g} a^4 + \pi \mathrm{c} a^2 \quad \Rightarrow$$

$$\mathrm{c} = -\frac{\omega^2}{4g} a^2 + h$$



نعوض قيمة c الناتجة، في (*) فنجد أن معادلة السطح الحر هي:

$$Z=\frac{\omega^2}{2g}\left[X^2+Y^2-\frac{a^2}{2}\right]+h$$

نتيجة1:

إذا جعلنا $\omega=0$، فتصبح الجملة $OXYZ$ عطالية، وبالتالي يؤول التوازن النسبي إلى توازن مطلق، حيث أن معادلة التوازن المطلق:

$$\rho\,\vec{g}=\overrightarrow{\text{grad}}\,P(M)\quad ;$$

$\forall t>0\ ,\ \forall M\equiv(X,Y,Z)\in$ للسائل المثالي الثقيل والمتوازن

وحيث: في كل لحظة $t>0$ يكون:

$$\begin{cases}\vec{P}_n(M)=-P(M).\vec{n} \quad ; \quad P(M):=\left|\vec{P}_n(M)\right| \\ \forall M\in \text{للسائل المثالي الثقيل والمتوازن} \quad \wedge \quad \forall\vec{n}\ ;\ |\vec{n}|=1\end{cases}$$

هذا من جهة. ومن جهة أخرى تصبح حزمة سطوح سوية الضغط هي مستويات أفقية، كما تصبح معادلة السطح الحر: $Z=h$.

أي أننا عدنا إلى مبرهنة الأواني المستطرقة في حالة التوازن المطلق.

انتهت المحاضرة.

بتاريخ 23 12 2010.

نهاية المقرر.

تم بعون الله في 23 – 12 – 2010 .